IMPERIAL ... INSTITUTE
15 AUG 1938

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

MAYO 1938. — ENTREGA V. — TOMO CXXV

SUMARIO

Pág.

MATEMATICAS:

FRANCISCO LA MENZA. — Los sistemas de inecuaciones lineales y sus aplicaciones al estudio de los cuerpos convexos (*Continuación*) 321

QUIMICA:

DR. CARLOS A. SAGASTUME. — La arquitectura molecular en bioquímica (Conclusión) 351

ENRIQUE V. ZAPPI Y RAFAEL LABRIOLA. — Sobre un nuevo radical libre y coloreado, derivado del cianógeno 370

CIENCIAS NATURALES:

KENNETH J. HAYWARD. — Hesperioidea argentina VII 374

EMILIO L. DÍAZ. — Contribución al estudio de la circulación atmosférica 384

Congreso internacional de Geografía. 398

Congreso internacional de Antropología y Etnografía 400

BUENOS AIRES

CALLE SANTA FÉ 1145

1938

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
Dr. Mario Isola †
Dr. Germán Burmeister †
Dr. Benjamín A. Gould †
Dr. R. A. Philippi †
Dr. Guillermo Rawson †
Dr. Carlos Berg †
Dr. Valentín Balbín †
Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
Dr. César Lombroso †
Ing. Luis A. Huergo †
Ing. Vicente Castro †
Dr. Juan J. J. Kyle †
Dr. Estanislao S. Zeballos †
Ing. Santiago E. Barabino †
Dr. Carlos Spegazzini †
Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
Ing. Eduardo Huergo †
Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Walter Nernst
Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. Alberto Einstein
Dr. Angel Gallardo †
Dr. Cristóbal M. Hicken †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich; Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1938-1939)

Presidente	Ingeniero **Jorge W. Dobranich**
Vicepresidente 1º	Doctor **Ramón G. Loyarte**
Vicepresidente 2º	Doctor **Gonzalo Bosch**
Secretario de actas	Ingeniero **Raúl E. Dubecq**
Secretario de correspondencia	Doctor **Santiago Barabino Amadeo**
Tesorero	Ingeniero **Edmundo Parodi**
Pro-tesorero	Profesor **José F. Molfino**
Bibliotecario	Ingeniero **Carlos A. Lizer y Trelles**
Vocales	Doctor **Claro C. Dassen**
	Doctor **Alfredo Sordelli**
	Doctor **Juan C. Vignaux**
	Doctor **Jorge Magnin**
	Doctor **Juan Ubaldo Carrea**
	Doctor **Reinaldo Vanossi**
	Ingeniero **Carlos Posadas**
	Ingeniero **Mario L. Negri**

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, **Santa Fe 1145.**

Impreso en los Talleres Gráficos "TOMAS PALUMBO" - La Madrid 321-325 - Buenos Aires

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y SUS APLICACIONES AL ESTUDIO DE LOS CUERPOS CONVEXOS

POR

FRANCISCO LA MENZA

*(Continuación *)*

CAPITULO III

§ 9. - CADENAS REGULARES Y CADENAS SINGULARES

30. **Permanencias singulares de una matriz.**— En el § precedente hemos definido el concepto de permanencia de una matriz y hemos hecho notar, (22, Obs.), su significado geométrico. Ahora ampliaremos dicho concepto y veremos que también corresponde a una propiedad geométrica análoga.

Diremos que $h + \nu$ filas de la matriz de un sistema $S_h(m, n)$, compatible de característica $h > 0$, forman una *permanencia singular* de ella, cuando el sistema parcial, $S'_h(h + \nu, n)$, de $S_h(m, n)$, relativo a las $h + \nu$ filas dadas, tiene la misma característica h y es totalmente singular.

El número h se llama *orden* de la permanencia singular, y el número ν, su *grado de singularidad*. En particular, cuando es $h + \nu = m$, la permanencia se llama *totalmente singular*.

Puesto que el sistema parcial, $S'_h(h + \nu, n)$ es, (1, IV), también compatible; por ser, además, totalmente singular de característica $h > 0$, resulta inmediatamente, de (7, III):

I) *Si $h + \nu$ filas de una matriz de característica $h > 0$, constituyen una permanencia singular, todos los determinantes de orden $h + 1$, formados con dichas filas, son nulos.*

En una permanencia singular de orden $h > 0$ y grado $\nu > 0$ de singularidad, hay, por lo tanto, $\binom{h+\nu}{h+1}$ determinantes nulos de orden $h + 1$.

(*) Ver *Anales S. C. A.*, Octubre 1937, Entrega IV, Tomo CXXIV.

De (4, VIII) y de (7) se concluye inmediatamente que:

II) *La condición necesaria y suficiente para que* $h + \nu$ *filas de una matriz de un* $S_h\,(m, n)$ *compatible de característica* $h > 0$ *formen una permanencia singular, es que entre los determinnates principales del sistema exista, por lo menos uno,* δ*, constituído por* h *filas de las* $h + \nu$ *dadas.*

El correspondiente resolvente, $R_h\,(\delta)$, es (4, VI), también principal. Los orlados de δ con cada una de las ν filas restantes de las dadas, son (I), todos nulos. $R_h\,(\delta)$ tiene, por lo tanto, (7), ν determinantes orlados nulos y $m - h - \nu$ orlados no nulos, los cuales tienen, (4, V), el mismo signo que δ. Como, (4, V), el signo de δ, determina el signo de todos los demás determinantes principales del sistema parcial formado por las inecuaciones relativas a las $h + \nu$ filas de la permanencia singular dada, dicho signo de δ, se dirá también, *signo* de la permanencia.

Cada uno de los orlados nulos se dice que constituye una *singularidad* de la permanencia dada con respecto al determinante δ, considerado. Como el número ν, de singularidades, es (7), siempre el mismo, cualquiera que sea el determinante principal δ, formado con h filas de las $h + \nu$ dadas, este número ν, se llama *grado* de la permanencia singular.

En particular, para $\nu = 0$, el resultante $R_h\,(\delta)$ carece de orlados nulos, es (7), regular, por lo tanto, las h filas de δ, forman, (21, I, II), también una permanencia, que llamaremos *regular* y que coincide con las definidas en (21). En lo sucesivo, cuando hablemos de una *permanencia*, sin ninguna especificación, nos referiremos indistintamente a una permanencia regular o singular.

Como, (18), un sistema irreducible de característica $h < 3$, es un sistema regular, todos sus resolventes principales, (7), son también regulares; por consiguiente, (II):

III) *Las matrices de sistemas compatibles e irreducibles de característica* $h < 3$*, carecen de permanencias singulares.*

En virtud de la definición y de (II), una permanencia singular de orden h con ν singularidades, está dada cuando se dan las filas que forman todos los determinantes principales de orden h, del correspondiente sistema parcial, totalmente singular, que ella determina.

Una permanencia singular de orden h, con ν singularidades, será designada con la notación $P_h\,[\nu]$; una permanencia regular de igual orden h, y determinante, δ, con $P_h\,(\delta)$. En lo sucesivo, la notación P_h designará una permanencia de orden h, que puede ser regular o singular.

Obs.: El caso de una permanencia singular con ν singularidades y de orden $h > 2$, (III), corresponde geométricamente al caso de un *vértice* de la figura poliédrica convexa h-dimensional, definida, (8), por todo sistema compatible cuya matriz admita la dada permanencia, en un espacio puntual euclídeo de h dimensiones. En dicho vértice concurren, precisamente, los $h + \nu$ hiperplanos, (10), relativos a las $h + \nu$ filas de la permanencia, por ser totalmente singular el sistema parcial formado con las $h + \nu$, correspoudientes inecuaciones.

Ejemplo 1:

En la figura del *ejemplo 3*, (20), las filas 1, 2, 3, 4, 5 de la correspondiente matriz, forman una permanencia singular de cuarto orden con una sola singularidad. Sus determinantes principales de cuarto orden son, en este caso, todos los formados por dichas filas:

(1234); (1235); (1245); (1345); (2345). Estos se determinan de acuerdo con las condiciones (16, II, III).

Sea, ahora, $P_h\,[\nu]$, una permanencia singular de orden h con ν singularidades de una matriz. Consideremos la matriz parcial de ella, formada por las $h + \nu$ filas de $P_h\,[\nu]$. Es también, por definición, una matriz de característica h. El correspondiente sistema parcial, $S'_h\,(h + \nu, n)$, es totalmente singular y también (1, IV), compatible. A cada sección completa de éste, corresponde, (25, II), una cadena cerrada de clase $h + \nu$ y orden $h - 1 > 1$, por ser, (III), $h > 2$. Las permanencias, (24), de esta cadena, que son todas regulares, se llamarán *permanencias componentes*, o, simplemente, *componentes*, de la permanencia singular, $P_h\,[\nu]$, dada.

Dado que, (26, II), también el conjunto de permanencias componentes de una permanencia regular de orden $h > 1$ constituye una cadena elemental de orden $h - 1$ que es también cerrada, resulta:

IV) *El conjunto de permanencias componentes de una permanencia regular o singular de orden $h > 1$, constituye una cadena cerrada de orden $h - 1$.*

Es claro que para el caso de $h = 1$, permanencias unitarias, las componentes son permanencias nulas, (23), y, por lo tanto, cadenas para las cuales, (25), no tiene sentido el calificativo de cerradas. Pero este caso no interesa, porque todas las permanencias unitarias son, (III), regulares.

En consecuencia, una permanencia singular, $P_h\,[\nu]$, también está determinada cuando se da la cadena cerrada que forman sus com-

ponentes. Las filas de sus correspondientes determinantes principales quedan determinadas por las condiciones (16, II, III). Para obtenerlas todas bastará formar las $\binom{h+\nu}{h}$ combinaciones de orden h con las $h + \nu$ filas de la dada permanencia singular, $P_h\,[\nu]$ y considerar, en estos grupos, todos aquéllos que tienen no menos de dos grupos de $h - 1$ filas coincidentes con las permanencias componentes de $P_h\,[\nu]$. Estos grupos de orden h, y sólo éstos, forman determinantes principales de la permanencia singular considerada.

Ejemplo 2:

Las componentes de la permanencia singular del ejemplo precedente, forman la cadena cerrada:

$$C_3 = \{124\}\,\{125\}\,\{134\}\,\{135\}\,\{234\}\,\{235\}.$$

Sus determinantes principales han sido obtenidos en el *ejemplo 1* con el procedimiento indicado.

Ejemplo 3:

Sea $P_4\,[2]$ la permanencia singular de cuarto orden con dos singularidades, cuya cadena de componentes es:

$$C_3 = \{123\}\,\{124\}\,\{135\}\,\{145\}\,\{236\}\,\{245\}\,\{256\}\,\{356\}.$$

De los quince grupos de cuatro filas que se pueden formar con sus seis filas, sólo constituyen determinantes principales de P_4 [2] los siguientes:
1234; 1235; 1236; 1245; 1256; 1345; 1356; 1456; 2356; 2456; los otros nó, como se reconoce fácilmente aplicando la regla dada más arriba.

Cuando sea necesario poner en evidencia las filas que forman una permanencia singular, la designaremos encerrando en un corchete la cadena cerrada constituída por sus componentes. Así:

$$[\{124\}\ 125\}\,\{134\}\,\{135\}\,\{234\}\,\{235\}]$$

designará la permanencia singular del *ejemplo 2*.

Finalmente, en virtud de (18, V, VI) y de (21, III),

V) *La condición necesaria y suficiente para que* $h + \nu$ *filas de la matriz de un sistema compatible e irreducible, de característica* $h > 2$, *definan una permanencia singular de orden* h *con* ν *singularidades, es que las* $h + \nu$ *filas formen una cadena cerrada de orden* $h - 1$ *y de clase* $h + \nu$.

31. **Permanencias regulares y singulares conjugadas.** — Se extiende fácilmente a las permanencias singulares, también el concepto de permanencias conjugadas (22). Para ello, observemos primeramente que la propiedad que caracteriza a dos permanencias regulares conjugadas, con respecto a sus componentes, es que:

I) *El conjunto de permanencias componentes, no comunes, de dos permanencias regulares de orden* $h > 1$, *constituye una cadena cerrada de orden* $h - 1$ *y de clase* $h + 1$, como resulta inmediatamente de (22) y de la agregación de cadenas, (27).

Recíprocamente,

II) *Si dos cadenas elementales de orden* $h - 1 > 0$, *tienen una permanencia común, sus filas constituyen sendas permanencias regulares conjugadas de orden* $h > 1$ *de una misma matriz,* como se deduce inmediatamente de (22).

Esta es también la propiedad que nos permitirá definir dos permanencias singulares conjugadas de modo que este concepto corresponda, a su vez, a una análoga propiedad geométrica, como en el caso de las regulares, (22, Obs.).

Para ello probaremos antes que:

III) *Si dos permanencias cualesquiera, de orden* $h > 1$, *de una misma matriz, tienen una sola componente común, todas las otras componentes no comunes, forman una cadena cerrada de orden* $h - 1$ *de dicha matriz.*

Sean (30, IV), C^1_{h-1} y C^2_{h-1} las correspondientes cadenas componentes cerradas y P_{h-1} la componente común. Para probar que el conjunto de las no comunes también forma una cadena cerrada de orden $h - 1$, bastará, (25), demostrar que, en dicho conjunto, con cada permanencia, figuran todas sus conjugadas. Por ser $h > 1$, es $h - 1 > 0$. Para $h = 2$, se trata, (30, III), de permanencias regulares, el teorema está demostrado en (I). Para $h > 2$, siendo $h - 1 > 1$, las cadenas dadas, son, por lo menos, de segundo orden. Cada permanencia de C^1_{h-1}, tiene todas sus conjugadas en C^1_{h-1}, y si ninguna de ellas es la P_{h-1}, figurarán también en el conjunto considerado. Si, en cambio, una de ellas es la P_{h-1}, como ésta tiene también todas sus conjugadas en C^2_{h-1}, entre todas, hay una que es conjugada de la dada. Del mismo modo se razona con las de C^2_{h-1}.

Recíprocamente,

IV) *Si dos cadenas cerradas,* C^1_{h-1} *y* C^2_{h-1}, *de orden* $h - 1 > 0$, *tienen una sola permanencia común, y las no comunes forman, a su vez, una cadena cerrada* C_{h-1}, *de orden* $h - 1$, *dichas cadenas son las componentes de sendas permanencias de orden h, de una misma matriz de característica h.*

Consideremos, (24, III), uno de los sistemas, $S_{h-1}\ (m, n)$ regulares finitos, correspondientes a la cadena C_{h-1}, y sea $M_{h-1}\ (m, n)$ su matriz. Si la cadena C_{h-1} es, (26), elemental, entonces $m = h$, y, en tal caso, C^1_{h-1} y C^2_{h-1}, son componentes de cadenas regulares; el teorema está demostrado en (II). Sea ahora, $h < m$; es posible, razonando en forma análoga que en (18, VI), agregar a la matriz $M_{h-1}\ (m, n)$, una nueva columna, de manera que se obtenga una matriz, $M_h\ (m, n)$ de característica h y de modo que ésta admita dos permanencias P^1_h y P^2_h cuyas componentes sean, respectivamente, C^1_{h-1} y C^2_{h-1}; bastará, para ello, elegir los elementos de la nueva columna de manera que los determinantes de orden h, formados por $h - 1$ filas de cada permanencia de C^1_{h-1} y de C^2_{h-1}, tengan signos convenientes. En cuanto a los respectivos orlados de orden $h + 1$, también podrán ser elegidos de modo que P^1_h y P^2_h, resulten con las correspondientes singularidades. Será suficiente (30, II), anular todos los formados por $h + 1$ filas de P^1_h y los formados por $h + 1$ filas de P^2_h, si ambas tienen más de h filas. Para todo ello basta referirse, como en (18, VI), a los resolventes del sistema $S_h\ (m, n)$, cuya matriz es $M_h\ (m, n)$. En definitiva, el sistema $S_{h-1}\ (m, n)$, resultará ser, así, una sección regular finita de $S_h\ (m, n)$, con una nueva inecuación convenientemente agregada al sistema, como en (18).

Diremos que dos permanencias cualesquiera (regulares o singulares) de una misma matriz y del mismo orden h, son *conjugadas*, cuando tienen una componente común y el conjunto de las componentes no comunes, forma una cadena cerrada, que es, (30), de orden $h - 1$. En particular, esta definición coincide, (I, II), con el caso de dos permanencias regulares.

Obs.: Es claro que el significado geométrico de dos permanencias singulares conjugadas, es el mismo que el de dos permanencias regulares (22, Obs.), como se reconoce inmediatamente de su definición y de (30, Obs.).

32. **Cadenas regulares y cadenas singulares.** — También generalizaremos el concepto de cadena de permanencias al caso de matrices con permanencias cualesquiera, es decir, regulares y singulares.

Diremos que un conjunto de permanencias (regulares o singulares) de una matriz, constituye una *cadena de permanencias* de la matriz, cuando toda permanencia del conjunto tiene una conjugada en él. La cadena se llama *regular*, cuando todas sus permanencias son regulares; *singular*, en caso contrario.

Como en (24), convendremos en llamar *cadena*, también al conjunto formado por una sola permanencia. Utilizaremos para las cadenas generales, las mismas notaciones que para las regulares, cuando no sea necesario distinguirlas. En lo sucesivo, cuando hablemos de una cadena sin ningún calificativo, se entenderá que se trata indistintamente de una cadena regular o singular, es decir, general.

Se dirá que una cadena no idéntica, es *cerrada*, si con cada permanencia figuran en la cadena, todas sus conjugadas. En caso contrario, se dirá que la cadena es *abierta*. Esta definición coincide con la dada en (25), para las cadenas regulares. Valen, como es inmediato reconocerlo, para las cadenas generales, los teoremas (25, IV y V), pues su demostración es análoga.

Para la formación de cadenas generales vale una regla semejante a la dada en (26, VI), pero veremos que todas ellas pueden ser deducidas de las cadenas regulares. De la precedente definición y de (30, V) y de los teoremas del número (31), se deduce para las cadenas generales que:

I) *a) En una cadena, no puede haber más de dos permanencias con una misma componente común* (17, VIII);

b) Ninguna cadena puede ser separada en dos partes, sin que alguna permanencia de una parte, tenga una conjugada en la otra, (26);

c) Todas las permanencias de una cadena, pueden ser ordenadas de modo que cada una de ellas sea conjugada de la precedente, (26, VI).

La propiedad *b* se expresa brevemente diciendo que el conjunto de permanencias de una cadena, es *conexo.*

En virtud de (30, III):

II) *No existen cadenas singulares de orden* $h < 3$.

Para las cadenas generales, subsiste el teorema análogo al (24, I) referente a las cadenas regulares:

III) *El conjunto de todas las permanencias de la matriz,* $M_h(m, n)$, *de un sistema,* $S_h(m, n)$, *compatible, regular o singular, forma una cadena,* $C_h(m, n)$, *respectivamente regular o singular, de orden y h de clase m.*

En efecto, si es $h < 3$, puesto que el sistema es reducible (14, II y 15, I) a un sistema regular, el teorema está demostrado en (24, I). Bastará probarlo, pues, para $h \geq 3$, y, (18, IX), para un sistema, $S_h(m, n)$ irreducible. También podemos suponer que es $m > h$, porque el caso $m = h$, siendo (7), regular, ha sido demostrado en (24, I). Puesto que el sistema es compatible, admite, (4, VIII), un resol-

vente principal, R_h (δ), regular o singular, respecto de un determinante δ de orden h, también principal. Sea P_h la permanencia regular, (21, I), o singular, (30, I), que corresponde a R_h (δ) en M_h (m, n), y, en este último caso, con las mismas ν, singularidades que R_h (δ).

Por ser $m > h$, existe (17, V), en R_h (δ), por lo menos, otro determinante principal δ', el cual tiene con δ, $h - 1 \geq 3 - 1 = 2$, filas comunes y, por lo tanto, otro resolvente principal, (7), al cual corresponde en la matriz una nueva permanencia P'_h. Es claro que sean regulares o singulares los resolventes principales R_h (δ) y R'_h (δ'), las correspondientes permanencias P_h y P'_h tienen una componente común formada por las $h - 1$ filas comunes de δ y δ'; como (30), en el caso singular, δ y δ' determinan todos los demás determinantes principales, las demás componentes de P_h y P'_h distintas de la permanencia común, forman, a su vez, (31, I, III), una cadena cerrada de orden $h - 1$. Luego P_h y P'_h son, (31), conjugadas en M_h (m, n). Así siguiendo se obtiene un conjunto de permanencias de orden h, en M_h (m, n), que determinan una cadena C_h (m, n), de orden h y de clase m, porque, por ser S_h (m, n) irreducible, toda fila de la matriz pertenece necesariamente, (18, IX) a alguna permanencia.

Ejemplo 1:

El sistema singular que define la región convexa cuya figura es la del *ejemplo 3*, (20), pertenece a la cadena singular,

$$C_4(6,4) = [\{125\}\ \{124\}\ 135\}\ \{134\}\ \{234\}\ \{235\}]\ \{1256\}\ \{1356$$
$$\{1246\}\ \{1346\}\ 2346\}\ \{2356\};$$

en donde se ha designado con 6 la fila que corresponde a la inecuación del hiperplano que no concurre con los otros cinco. La cadena consta de siete permanencias. La primera es singular y las otras seis son regulares.

Recíproco:

IV) *A toda cadena* C_h (m, n) (*regular o singular*) *de permanencias de una matriz*, M_h (m, n), *corresponde un sistema compatible* S_h (m, n) *de m inecuaciones principales, de característica h y de dimensión n.*

En virtud de (30, III) podemos suponer $h \geq 3$, porque para $h < 3$, siendo C_h (m, n) regular, el teorema está demostrado en (24, III).

Sea S_h (m, n), el sistema correspondiente a dicha matriz, M_h (m, n), y P_h una permanencia de la cadena C_h (m, n), dada. Como, (21, I) y (30, I) a P_h corresponde un resolvente principal R_h (δ) del sistema considerado, éste es, (4, VIII) compatible. Si la dada cadena no

tiene más permanencias, el teorema está demostrado. Si tiene otras permanencias, sea P'_h una conjugada de la P_h, puesto que éstas tienen una componente común de orden $h - 1$, y las restantes componentes no comunes, (31, II, IV), forman una cadena cerrada de orden $h - 1$, sus respectivos determinantes δ y δ', tienen $h - 1 \geq 3 - 1 = 2$ filas comunes, luego, (7), δ' pertenece al resolvente $R_h(\delta)$; por lo tanto el correspondiente resolvente principal, $R'_h(\delta)$, es un resolvente, (16, VII), del mismo sistema $S_h(m, n)$. De este modo, resulta demostrado el teorema, porque todos los resolventes así obtenidos son del sistema $S_h(m, n)$, el cual tiene necesariamente, (18, VIII), y (I, *b*) m inecuaciones principales, característica h y dimensión n por ser h la característica de la correspondiente matriz y n el número de sus columnas.

33. **Contracción de dos permanencias.** — Interesa particularmente en esta teoría de las formas geométricas, la obtención de todas las posibles cadenas regulares y singulares que admite un dado tipo, $T_h(m, n)$ de matriz, porque de este modo se obtienen también, en virtud del teorema precedente, todos los sistemas compatibles e irreducibles, $S_h(m, n)$, cuyas matrices pertenecen al dado tipo; es decir, de dada característica h, dimensión n y dado número, m, de inecuaciones principales, y en consecuencia, (8), quedan determinadas sus correspondientes figuras.

Veremos que, para ello, será suficiente formar todas las cadenas regulares que admite el dado tipo de matriz, cuestión resuelta en (26); las posibles cadenas singulares se deducen de las regulares mediante una nueva operación que en seguida definiremos.

Sean P_h^1 y P_h^2 dos permanencias conjugadas de una misma cadena regular o singular, $C_h(m, n)$, de orden $h > 2$. Sus respectivas permanencias componentes constituyen, (30, IV), sendas cadenas regulares cerradas C_{h-1}^1 y C_{h-1}^2 de orden $h - 1 > 2 - 1 = 1$; la cadena C_{h-1}, de orden $h - 1$ que resulta (31), del conjunto de las permanencias componentes no comunes de C_{h-1}^1 y C_{h-1}^2, se dirá *contracción* de las permanencias conjugadas P_h^1 y P_h^2 dadas. En cuanto a las permanencias P_h^1 y P_h^2, se dice que han sido *contraídas*, y ellas mismas se dirán, con frecuencia, *elementos* de la contracción.

Con respecto a esta nueva operación con las permanencias de una misma cadena, $C_h(m, n)$, dos eventualidades son posibles:

a) El conjunto de permanencias formado por la permanencia singular, $[C_{h-1}]$, proveniente de la dada contracción y de las restantes permanencias de $C_h(m, n)$, es decir, todas, menos P_h^1 y P_h^2,

constituye, a su vez, una nueva cadena de orden h y de clase m; en cuanto a la dimensión n, es siempre la misma, no puede alterar en esta operación;

b) Dicho conjunto, no forma cadena, o bien forma una cadena de clase menor que la de la clase dada.

En el primer caso, *a*), se dirá que la cadena $C_h(m, n)$ *admite* la dada contracción, P_h^1, P_h^2; en caso contrario, *b*), se dirá que *no admite* la contracción, P_h^1, P_h^2. La nueva cadena así obtenida, se dirá cadena *deducida* de la $C_h(m, n)$ mediante la contracción de P_h^1 y P_h^2.

Se comprende que pueden presentarse las dos eventualidades consideradas, porque cada contracción equivale a una permanencia singular con más singularidades que las existentes en las permanencias contraídas, en caso de ser singular alguna de ellas, y esta nueva singularidad, (30, I), implica la anulación de nuevos determinantes de orden $h + 1$, en toda matriz que admite la dada cadena, $C_h(m, n)$, en la cual se hace la *contracción*. La operación será posible o no, según que se verifiquen, en dicha matriz, las relaciones (6.3) entre todos sus determinantes de orden $h + 1$.

Ejemplo 1:

La cadena regular,

$$C_3(6, n) = \{123\}\ \{124\}\ \{135\}\ \{145\}\ \{236\}\ \{245\}\ \{256\{\ \{356\},$$

del *ejemplo 1*, (26), no admite la contracción cuyos elementos son las permanencias $\{123\}$ y $\{135\}$. En efecto, para que estas cuatro filas formen una permanencia singular de la nueva cadena resultante, es preciso (30, I) que sea nulo el determinante de cuarto orden formado con ellas. Es decir, $(1235) = 0$.

Escribamos las relaciones (6 . 3) en la forma:

$$(i\,j\,k\,l)\ (1235)^3 = \begin{vmatrix} (i\ 235) & (1\,i\ 35) & (12\,i\ 5) & (123\,i) \\ (j\ 235) & (1\,j\ 35) & (12\,j\ 5) & (123\,j) \\ (k\ 235) & (1\,k\ 35) & (12\,k\ 5) & (123\,k) \\ (l\ 235) & (1\,l\ 35) & (12\,l\ 5) & (123\,l) \end{vmatrix}, \qquad (\alpha)$$

donde con i, j, k, l se designa una cualquiera de las filas *1*, *2*, *4* y *6*.

En particular, para $i = 1$, $j = 2$, resulta:

$$(12\,k\,l)\ (1235) = \begin{vmatrix} (12\,k\ 5) & (123\,k) \\ (12\,l\ 5) & (123\,l) \end{vmatrix}, \qquad (\beta)$$

porque todos los que tienen en (α) dos filas iguales son idénticamente nulos.

La realción (β) tiene lugar cualesquiera que sean los valores asignados a los determinantes que en ella figuran; en particular, cuando sea (1235) = 0 se debe tener también

$$\begin{vmatrix} (12\,k\,5) & (123\,k) \\ (12\,l\,5) & (123\,l) \end{vmatrix} = 0\ ;$$

de donde, para $k = 4$, $l = 6$ resulta:

$$(1245)\ (1236) = -(1234)\ (1256)\,. \qquad (\gamma)$$

Ahora bien, esta última relación es incompatible con las relaciones de signo entre los determinantes de cuarto orden de dicha cadena, las cuales están consignadas en el cuadro de la página 123. En efecto, según aquéllas, el primer miembro de (γ) tiene signo negativo, mientras que el segundo resulta positivo. Ello es solamente posible si uno, al menos, de los factores de cada miembro fuese nulo, a su vez. Pero en tal caso, el grado de singularidad de la permanencia sería superior al dado, contra lo supuesto. La cadena considerada no admite, pues, tal contracción. En cambio, es fácil ver que admite la contracción cuyos elementos son las permanencias $\{135\}$ y $\{145$.

Obs.: El significado geométrico de una contracción no es otra cosa que la supresión de la arista común determinada, (30, Obs.), por las dos permanencias contraídas, reuniendo los dos vértices, (31, Obs.), correspondientes a ellas, en uno solo, en los casos en que ello es posible, de modo que se conserven la dimensión h de la figura convexa y su número m de caras.

Un caso en que tal operación, seguramente, no es posible sin que disminuya el número de filas de la cadena, está dado por el teorema siguiente:

I) *Si en una cadena* $\boldsymbol{C}_h\,(m, n)$, *una fila* i, *pertenece sólo a* h *permanencias suyas, toda contracción, cuyos elementos son permanencias que contienen la fila* i, *da lugar a una nueva cadena, de igual orden,* h, *en la cual falta la fila* i.

Puesto que, por definición, es $h > 2$, y $\boldsymbol{C}_h\,(m, n)$, tiene más de una permanencia, es, (24), $m > h$. Sea, (32, IV), $S_h\,(m, n)$, un sistema perteneciente a la dada cadena. El sistema subordinado de primer orden, (10, I), en el cual es cero el polinomio relativo a la fila i, es compatible y tiene, (21, I, y 30, II), h determinantes principales, los correspondientes a las h permanencias a las que pertenece i, en $\boldsymbol{C}_h\,(m, n)$. Por lo tanto, siendo su característica complementaria (11), $h' = h - 1$, su correspondiente resolvente principal, (7), y (26, II), se reduce a una sola ecuación cuyos coeficientes tienen todos el mismo signo que el relativo determinante orlado. Pero éste se

obtiene, por otra parte, (10), anulando en un resolvente principal de $S_h\ (m, n)$, la variable paramétrica X_i, relativa a la fila i. Si por efecto de la contracción se anula el correspondiente determinante de orden $h + 1$, resulta en dicho resolvente una ecuación homogénea con h coeficientes de signos iguales entre sí, lo cual implica que, en el nuevo sistema así obtenido, también compatible, (9, I), es sobrante la fila i. Luego, en la correspondiente cadena (32, II), falta la fila i.

Cuando en una cadena se efectúa una contracción de modo que en la nueva cadena resultante hay una fila menos que en la cadena dada, se dirá que la operación es una *contracción inadecuada*; en caso en que la contracción es posible y no altera el número de filas de la cadena, se dirá que es una *contracción adecuada*. Resulta así, en consecuencia:

II) *Si una cadena* $C_h\ (m, n)$, *admite una dada contracción, la cadena deducida de ella tiene clase igual o menor que* $C_h\ (m, n)$, *según que dicha contracción sea, respectivamente, adecuada o inadecuada.*

Puesto que, por definición, la contracción adecuada, cuando es admitida por una cadena, no hace más que reducir a una sola dos permanencias conjugadas, se deduce, (32), inmediatamente, que:

III) *Toda cadena, deducida por contracción adecuaaa de permanencias de otra cadena cerrada, es también cerrada.*

La existencia de una cadena $C_h\ (m, n)$, regular o singular, en una matriz de dado tipo, $T_h\ (m, n)$, implica, (24 y 30), relaciones de signo y de anulación perfectamente determinadas entre sus determinantes de orden $h + 1$, las cuales deben ser compatibles con las demás relaciones entre los determinantes de una misma matriz, dadas por las expresiones (6.3).

Escribamos explícitamente dichas expresiones, haciendo intervenir, como variables, las filas de la correspondiente matriz. Se tiene:

$$(i_1 \ldots i_h i_{h+1})(a_1 \ldots a_h a_{h+1})^h = \begin{vmatrix} (i_1 \quad a_2 \ldots a_{h+1})(a_1 i_1 \quad a_3 \ldots a_{h+1}) \ldots (a_1 a_2 \ldots a_h i_1) \\ (i_2 \quad a_2 \ldots a_{h+1})(a_1 i_2 \quad a_3 \ldots a_{h+1}) \ldots (a_1 a_2 \ldots a_h i_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (i_{h+1} a_2 \ldots a_{h+1})(a_1 i_{h+1} a_3 \ldots a_{h+1}) \ldots (a_1 a_2 \ldots a_h i_{h+1}) \end{vmatrix}$$

Para $i_1 = a_1,\ i_2 = a_2, \ldots, i_{h-1} = a_{h-1}$, resulta, en particular,

$$(a_1 a_2 \ldots a_{h-1} i_h i_{h+1})(a_1 a_2 \ldots a_h a_{h+1}) = \begin{vmatrix} (a_1 \ldots a_{h-1} i_h \quad a_{h+1})\ (a_1 \ldots a_h i_h) \\ (a_1 \ldots a_{h-1} i_{h+1} a_{h+1})\ (a_1 \ldots a_h i_{h+1}) \end{vmatrix},$$

o sea, en el segundo miembro, un determinante de segundo orden. Esta última igualdad se verifica idénticamente, cualesquiera que sean los valores de los determinantes de orden $h+1$ que en ella figuran. Luego, para $(a_1\, a_2 \ldots a_h\, a_{h+1}) = 0$, se debe tener también

$$\begin{vmatrix} (a_1 \ldots a_{h-1}\, i_h \quad a_{h+1})\,(a_1 \ldots a_h\, i_h) \\ (a_1 \ldots a_{h-1}\, i_{h+1}\, a_{h+1})\,(a_1 \ldots a_h\, i_{h+1}) \end{vmatrix} = 0\,.$$

De donde

$$(a_1 \ldots a_{h-1}\, i_h\, a_{h+1})(a_1 \ldots a_h\, i_{h+1}) = (a_1 \ldots a_{h-1}\, i_{h+1}\, a_{h+1})(a_1 \ldots a_h\, i_h) \quad [33.1]$$

Tratándose solamente de signos y de ceros, es fácil ver que las demás relaciones (6.3), en las cuales hay menos de $h-1$ coincidencias de filas, son siempre posibles. Basta, por lo tanto, que se verifiquen sólo estas últimas para cada determinante nulo de orden $h+1$. En consecuencia:

IV) *La condición necesaria y suficiente para que una cadena,* $C_h(m, n)$, *admita una contracción adecuada de dos permanencias suyas, es que, además de las relaciones existentes entre los determinantes de orden* $h+1$ *de toda matriz que tiene dicha cadena, se verifiquen las nuevas relaciones* (33.1) *que resultan de anular en ella, el otro determinante de orden* $h+1$, *por efecto de la contracción.*

En virtud de esto,

V) *Toda cadena cerrada singular puede ser deducida, mediante sucesivas contracciones adecuadas, de las cadenas regulares cerradas de igual orden y clase que la dada.*

§ 10. - DERIVACION DE CADENAS

34. **Cadenas derivadas de una cadena.** — Demostraremos aquí un grupo de proposiciones fundamentales que permitirán definir, para toda cadena $C_h(m, n)$, una operación parecida a la derivación y que, en cierto modo, hasta tiene, como aquélla, un análogo significado geométrico.

Recordemos, (23), que, dada una permanencia regular $P_h(\delta)$ de una matriz, las permanencias subordinadas de ella, relativas a s filas dadas, son de orden $h-s$, si es $s < h$, y de orden nulo, si es $s = h$ y se obtienen de $P_h(\delta)$, suprimiendo, en ésta, (23, I) las s filas dadas. Recíprocamente, dada una permanencia regular, $P'_h(\delta)$

nula o no, se puede considerar, de infinitos modos, como una permanencia subordinada de otra, de orden superior a ella.

La operación que consiste en formar la permanencia subordinada de una permanencia regular $P_h\,(\delta)$, relativa a s filas dadas, la llamaremos *derivación de la permanencia*, y llamaremos *permanencia derivada* de orden s, relativa a las s filas dadas, a la nueva permanencia que así se obtiene. La permanencia derivada de orden s relativa a s filas dadas, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s$ de $P_h\,(\delta)$, la indicaremos con la notación

$$\mathcal{D}^{s}_{a_1,\,a_2,\ldots,\,a_s}\,P_h\,(\delta)$$

o simplemente con

$$P_h\,\mathcal{D} \qquad \text{o} \qquad \mathcal{D}_{a_1,\,a_2,\ldots,\,a_s}\,P_h$$

según convenga.

Ella se obtiene, como hemos dicho, suprimiendo en $P_h\,(\delta)$ las s filas cuando sea $s < h$, y todas, cuando sea $s = h$.

Probemos que:

I) *El conjunto de todas las permanencias derivadas de orden s, relativas a s filas dadas, de las permanencias de una misma cadena regular,* $C_h\,(m, n)$, *forman también una cadena regular de orden* $h - s$, *para* $s < h$, *y nula para* $s = h$.

Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición de cadena regular y de la operación precedente, puesto que al suprimir, en las permanencias que las contienen, el mismo grupo de filas, las que eran conjugadas, siguen siendo todavía, (22), conjugadas. En el caso $s = h$, la cadena se reduce a permanencias nulas. Es, por lo tanto, una cadena nula.

La cadena, así obtenida, de orden $h - s$, para $s < h$, y de orden *cero* para $s = h$, la llamaremos *cadena derivada de orden s* de la cadena dada, relativa al grupo, g, de filas dadas, y la designaremos con la notación

$$\mathcal{D}^{s}_{g}\,C_h\,(m, n) = C'_{h-s}\,,$$

o también con

$$\mathcal{D}_g\,C_h \quad , \quad C_h\,\mathcal{D}^{s}\,,$$

según convenga.

El grupo g, se llama *grupo de filas de la cadena derivada*. En particular, cuando se trata de una sola fila, ésta se dirá *fila de la cadena derivada.*

Siendo, (30, IV), el conjunto de permanencias componentes de una permanencia singular P_h, de orden h, una cadena regular C_{h-1} de orden $h-1$, se dirá *permanencia derivada de orden s*, con respecto a $s < h-1$ filas dadas de P_h, a la cadena derivada, (I), de C_{h-1}, con respecto a dicho grupo de filas.

Esta operación, puede extenderse, en las permanencias singulares, P_h, aún al caso de un grupo $s = h-1$ de sus filas. Para ello, basta recordar que, por definición, la derivación de permanencias regulares, equivale a la formación de permanencias subordinadas y que éstas implican, a su vez, (10), los sistemas subordinados compatibles de orden s, relativos al correspondiente resolvente principal. Puesto que, (30), a una permanencia singular, $P_h\,[\nu]$, corresponden sistemas compatibles totalmente singulares formados por sus $h+\nu$ filas; las filas que, en cada resolvente principal $R_h\,(\delta)$ de éstas con respecto a un dado determinante δ, dan lugar a un sistema subordinado compatible de orden $s = h-1$, son, (10, I), las $h-1$ que pertenecen a δ; la restante fila de δ, es la relativa a aquella variable paramétrica que define, en $R_h\,(\delta)$, el mencionado sistema subordinado compatible, el cual tiene, (11), característica complementaria $h' = h-(h-1) = 1$, es decir, es unitario, y por lo tanto regular. Corresponde, pues, a una permanencia regular cuya fila es la susodicha. Esta consideración justifica el siguiente convenio. Consideraremos, de una permanencia singular, P_h, también la *derivada de orden s* con respecto a $s = h-1$ filas dadas de ella, correspondientes a una misma componente, como una *cadena unitaria* cuya única permanencia es la fila restante, en cualquier determinante principal, δ, que contiene a las $h-1$ dadas.

Ejemplo 1:

Así, la derivada de la permanencia singular $P_4\,[2]$ del *ejemplo 3*, (30), con respecto al grupo 123, es una cualquiera de las cadenas unitarias abiertas siguientes: $\{4\}\,;\{5\}\,;\{6\}$. La indeterminación es sólo aparente, porque, el correspondiente sistema subordinado compatible, es el mismo. Esto no significa sino que él puede obtenerse en uno cualquiera de los tres resolventes cuyos determinantes principales son (1234), (1235), (1236).

También se puede considerar, de una permanencia singular, la permanencia derivada de orden $s \geq h$ con respecto a s filas de ella, entre las cuales figuren $h-1$ filas de una misma permanencia componente, conviniendo en que sea la *derivada* de orden $s \geq h$, una *permanencia nula;* lo cual está plenamente justificado por el

hecho de que los correspondientes sistemas subordinados son idénticos, por tener (11, I), característica complementaria nula.

Estas consideraciones permiten generalizar la derivación a toda cadena regular o singular de permanencias y probar que:

II) *El conjunto de todas las permanencias derivadas de orden s, relativas a s filas dadas de las permanencias de una misma cadena regular o singular, forman también una cadena de orden* $h - s$ *para* $s < h$, *y de orden cero para* $s \geq h$.

Es consecuencia inmediata de la definición de cadena (32), puesto que la derivación se reduce a suprimir, en las permanencias que las contienen, el grupo de filas con respecto al cual se deriva; luego las permanencias conjugadas, siguen siendo también conjugadas. Es claro que para $s < h$, el orden de la cadena derivada es $h - s$ y cero para $s \geq h$, debido a que tal resulta el de cada una de sus permanencias.

Finalmente, es inmediato que la derivación de cadenas, puede hacerse ya sea simultánea o sucesivamente, y en cualquier orden. Con lo que resulta la propiedad de *inversión* en el orden de la derivación de cadenas:

III) *Si una cadena admite la cadena derivada de orden s, relativa a s filas dadas, ella es independiente del orden, y puede obtenerse de las derivadas sucesivas de orden inferior, relativas a las mismas filas dadas.*

Ejemplo 2:

La derivada de la cadena singular $C_4\,(6,4)$ del *ejemplo 1*, (32), de primer orden, con respecto a la fila 1 de ella, es la cadena de tercer orden:

$$\mathcal{D}_1\ C_4\,(6,4) = [\{25\}\ \{24\}\ \{35\}\ \{34\}]\ \{256\}\ \{356\}\ \{246\}\ \{346\} \qquad (\alpha)$$

Ella ha sido obtenida derivando cada permanencia de $C_4\,(6,4)$. Es decir, considerando todas las que contienen la fila 1 y suprimiendo en ellas esta misma fila.

La derivada de segundo orden de la misma cadena, con respecto al grupo de filas, 12, es:

$$\mathcal{D}_{12}\ C_4\,(6,4) = [\{5\}\ \{4\}\ ]\ \{56\}\ \{46\}\,. \qquad (\beta)$$

Esta misma cadena resulta derivando nuevamente, con respecto a la fila 2, la (α):

$$\mathcal{D}_2\left(\mathcal{D}_1\ C_4\,(6,4)\right) = [\{5\}\ \{4\}]\ \{56\}\ \{46\}\,.$$

De las definiciones dadas y de (32, II), se deduce inmediatamente que:

IV) *Las cadenas derivadas de orden s, de una misma cadena singular de orden h, son cadenas regulares para* $s = h - 1$, $s = h - 2$ y $s \geq h$ *y cadenas singulares, en todos los demás casos;* puesto que resultan, respectivamente, cadenas de primer orden, segundo orden, y orden cero, y de orden superior, en los demás casos.

En el ejemplo precedente la cadena (β), derivada de segundo orden de la cadena singular $C_4(6, 4)$, de cuarto orden, es una cadena regular.

Puesto que las cadenas derivadas de orden $h - 1$ y de orden $h - 2$, de una cadena singular de orden h, son siempre cadenas regulares de primer orden y de segundo orden respectivamente, se puede usar para ellas la notación de las cadenas regulares. Sin embargo, en ciertos casos, es útil saber si una permanencia de primer o de segundo orden de una cadena derivada, proviene o no de una permanencia singular, en la cadena primitiva. En tal caso conviene conservar la notación, como si se tratase de una permanencia singular.

Ejemplo 3:

Así la derivada

$$\mathcal{D}_{12}\, C_4(6,4) = [\,\{5\}\,\{4\}\,\{56\}\,\{46\}\,]$$

del ejemplo precedente, es una cadena binaria, y, por lo tanto, (32, II), regular. Ella es idéntica a la cadena

$$\{54\}\,\{56\}\,\{64\}.$$

Sin embargo aquella notación expresa algo más que ésta; asegura que la permanencia $\{54\}$ proviene de una permanencia singular de $C_4(6,4)$.

Sea, ahora, $C_h(m, n)$, una cadena dada, y $S_h(m, n)$, (32, IV), un sistema perteneciente a ella. La operación que consiste en obtener el sistema subordinado compatible de orden s, relativa a s polinomios dados de $S_h(m, n)$, de característica subordinada (11), $h' = h - s$, para $s < h$ y cero para $s \geq h$, corresponde a la derivación de la cadena $C_h(m, n)$, respecto a las s filas de dichos polinomios dados y viceversa. Podemos concluir, entonces (32, III, IV), que:

V) *A todo sistema subordinado compatible de orden s, relativo a s polinomios dados de un* $S_h(m, n)$, *corresponde la cadena derivada de orden s, con respecto a las filas de los s polinomios, en la cadena,* $C_h(m, n)$, *a que pertenece el sistema dado;* y recíprocamente:

VI) *A toda cadena derivada de orden s, de* $C_h(m, n)$, *con respecto a un grupo de s filas dadas de ella, pertenece el sistema subordinado*

compatible del sistema $S_h(m, n)$, *con respecto a los s polinomios de las s filas dadas de* $C_h(m, n)$,

Ejemplo 4:

Así, en la figura del *ejemplo 3*, (20), a la cadena (α), derivada de primer orden con respecto a la fila 1, de la cadena $C_4(6,4)$, a que pertenece dicha figura, corresponde la pirámide cuadrangular, de vértices 12345, 125, 135, 134 y 124, en la cual, la base ha sido designada, con el número 6, pues, esos mismos vértices están dados por las permanencias [{25} {24} {35} {34}], {256}, {356}, {246}, {346}, la primera de las cuales es singular y las otras cuatro son regulares.

En cambio a la cadena (β), derivada de segundo orden de $C_4(6,4)$, con respecto a las filas 1,2, corresponde la cara triangular, cuyos vértices son 12345, 124 y 125; las relativas permanencias son {54}, {46}, {64}, puesto que la [{5} {4}] es también regular e idéntica a la {54}, (IV).

Los dos teoremas precedentes y este último ejemplo, justifican plenamente la analogía de la derivación de cadenas anunciada al principio de este número, con la derivación ordinaria, puesto que también determina, como ésta, los elementos límites de la figura, *caras*, *aristas*, *vértices*, etc.

Resulta inmediatamente, (32), que:

VII) *Las cadenas derivadas de una cadena cerrada de orden mayor que la unidad, son también cerradas.*

En cuanto a las cadenas unitarias, sus cadenas derivadas, son de orden cero; es decir, idénticas, y el teorema carece de sentido.

También, como consecuencia inmediata de (10, I), y (V, VI), resulta:

VIII) *A cada par de sistemas subordinados compatibles de primer orden, contiguos en un mismo* $S_h(m, n)$, *perteneciente a una cadena* $C_h(m, n)$; $(h > 1)$, *corresponde un par de cadenas, derivadas de primer orden de* $C_h(m, n)$, *que tienen una cadena en común, derivada de segundo orden de* $C_h(m, n)$, *a la cual pertenece, a su vez, la intersección de ambos sistemas contiguos.*

Recíprocamente:

IX) *A cada par de cadenas derivadas de primer orden de una cadena* $C_h(m, n)$, *de orden* $h > 1$, *con una cadena en común, derivada de segundo orden de* $C_h(m, n)$, *corresponde, en todo* $S_h(m, n)$ *perteneciente a* $C_h(m, n)$, *un par de sistemas subordinados de primer orden compatibles, contiguos en el sistema, y a la cadena derivada de segundo orden, la intersección de éstos.*

Sea C_h una cadena de orden $h > 1$ y C^1_{h-1} y C^2_{h-1} dos cadenas derivadas de primer orden de C_h, que tienen una cadena en común,

derivada de segundo orden de C_h; las cadenas C^1_{h-1} y C^2_{h-1} se dicen *asociadas en* C_h.

Si

$$C^1_{h-1} = \mathcal{D}_a C_h \quad \text{y} \quad C^2_{h-1} = \mathcal{D}_b C_h,$$

se tiene:

$$\mathcal{D}_b C^1_{h-1} = \mathcal{D}_b \left(\mathcal{D}_a C_h \right) = \mathcal{D}_{a,b} C_h.$$

$$\mathcal{D}_a C^2_{h-1} = \mathcal{D}_a \left(\mathcal{D}_b C_h \right) = \mathcal{D}_{b,a} C_h.$$

Luego (III), siendo

$$\mathcal{D}_{a,b} C_h = \mathcal{D}_{b,a} C_h,$$

resulta:

$$\mathcal{D}_b C^1_{h-1} = \mathcal{D}_a C^2_{h-1} = \mathcal{D}_{a,b} C_h.$$

Es decir:

X) *La cadena común, de orden* $h - 2$, *de un par de cadenas asociadas, en una cadena* C_h, *de orden* $h > 1$, *es la cadena derivada de primer orden de una cualquiera del par asociado, con respecto a la fila de la otra.*

De (VIII) y de (19, III), se sigue inmediatamente que:

XI) *En toda cadena* C_h *de orden* $h > 1$, *a cada cadena derivada de primer orden de ella, corresponde una cadena derivada de primer orden asociada en* C_h.

Ejemplo 5:

Sea C_4 (6,4) la primera cadena del *ejemplo 3*, (26). Se tiene:

$$C_3 = \mathcal{D}_1 C_4 (6,4) = \{234\}\,\{235\}\,\{246\}\,\{345\}\,\{256\}\,\{456\},$$

$$C'_3 = \mathcal{D}_2 C_4 (6,4) = \{134\}\,\{135\}\,\{146\}\,\{346\}\,\{156\}\,\{356\},$$

Ambas cadenas, C_3 y C'_3, así obtenidas, son asociadas en la C_4 (6,4), pues

$$\mathcal{D}_2 C_3 = \mathcal{D}_2 \left(\mathcal{D}_1 C_4 (6,4) \right) = \{34\}\,\{35\}\,\{46\}\,\{56\},$$

$$\mathcal{D}_1 C'_3 = \mathcal{D}_1 \left(\mathcal{D}_2 C_4 (6,4) \right) = \{34\}\,\{35\}\,\{46\}\,\{56\}.$$

Tienen, en común, la cadena:

$$C''_2 = \{34\}\,\{35\}\,\{46\}\,\{56\},$$

que es, a la vez, la

$$\mathcal{D}_{1,2} C_4 (6,4) = \{34\}\,\{35\}\,\{46\}\,\{56\}.$$

El significado geométrico de cada uno de estos resultados es muy claro. La primera cadena obtenida, C_3, corresponde a la *cara pentaédrica* de la primera figura del *ejemplo 3*, (26), cuyos vértices son: 1234; 1235, 1246; 1345; 1256 y 1456. La segunda cadena, C'_3, corresponde también a una *cara pentaédrica*, cuyos vértices son: 1234; 1235; 1246; 2346; 1256 y 2356. Ambas caras pentaédricas tienen, en común, a su vez, una *cara plana*, formada por el *cuadrilátero* de vértices 1234; 1235; 1246 y 1256, que corresponde a la cadena C''_2.

Ejemplo 6:

Sea $C_4(6,4)$, la cadena singular considerada en el *ejemplo 1*, (32). Ella corresponde a la figura del *ejemplo 3*, (20). Se tiene:

$$C_3 = \mathcal{D}_1 C_4(6,4) = [\{25\}\{24\}\{35\}\{34\}]\{256\}\{356\}\{246\}\{346\},$$

$$C'_3 = \mathcal{D}_2 C_4(6,4) = [\{15\}\{14\}\{34\}\{35\}]\{156\}\{146\}\{346\}\{356\}.$$

Ambas cadenas, C_3 y C'_3 son asociadas en la cadena $C_4(6,4)$; tienen en común la cadena

$$C''_2 = \mathcal{D}_{1,2} C_4(6,4) = [\{5\}\{4\}]\{56\}\{46\} \equiv \{54\}\{56\}\{46\}.$$

A la cadena C_3, en la mencionada figura, en la cual, al hiperplano que no pasa por el vértice 12345, lo designamos con el número 6, corresponde la *cara* formada por la *pirámide cuadrangular* de vértices: 12345; 1256; 1356; 1246 y 1346. A la cadena C'_3, la *cara* formada también por la *pirámide cuadrangular* de vértices: 12345; 1256; 1246; 2346 y 2356. Ambas pirámides tienen la *cara plana* común, formada por el *triángulo* de vértices: 12345; 1256 y 1246, que corresponde a la cadena C''_2.

Obs.: Nótese que no todo par de cadenas, derivadas de primer orden de una misma cadena C_h, es *asociado* en C_h. Ello podría inducir a error, después de haber probado, (III), la propiedad de inversión, en el orden de la derivación, porque debe resultar, necesariamente, en virtud de ello:

$$\mathcal{D}_a(\mathcal{D}_b C_h) = \mathcal{D}_b(\mathcal{D}_a C_h).$$

Pero es preciso, para esto, que las cadenas $\mathcal{D}_b C_h$ y $\mathcal{D}_a C_h$ sean, a su vez, respectivamente derivables con respecto a las filas a y b, lo que no siempre ocurre.

Así, en la cadena,

$$C_3 = \{123\}\{124\}\{135\}\{145\}\{236\}\{245\}\{256\}\{356\},$$

las siguientes cadenas derivadas de primer orden:

$$C_2 = \mathcal{D}_1 C_3 = \{23\}\ \{24\{\ \{35\}\ \{45\}$$

y

$$C'_2 = \mathcal{D}_6 C_3 = \{23\}\ \{25\}\ \{35\}\ ,$$

no son asociadas; pues, en C_2 no existe $\mathcal{D}_6 C_2$ ni en C'_2, $\mathcal{D}_1 C'_2$.

Es fácil probar, finalmente, que:

XII) *Toda cadena, C_h, de orden $h > 0$, queda unívocamente determinada cuando se dan sus derivadas de primer orden, las eventuales singularidades de C_h, de las cuales proceden las permanencias derivadas, y las filas de C_h, respecto de las cuales han sido obtenidas sus derivadas.*

El teorema es inmediato para una cadena regular C_h. Para ello, basta reponer, en las permanencias de cada una de sus cadenas derivadas, la fila respecto de la cual se derivó. Tomando, después, en tal conjunto, una sola vez cada permanencia repetida, resulta la cadena C_h; pues en tal operación, sólo pueden repetirse las permanencias de C_h, pero no formarse nuevas permanencias. Si la cadena es singular, puesto que, por hipótesis, se dan, en las derivadas, las permanencias que proceden de cada singularidad, como éstas son, (30, IV), en C_h, cadenas regulares de orden $h - 1$, el teorema se reduce al caso precedente.

Obs.: En general, no es preciso conocer todas las cadenas derivadas de primer orden de una cadena, para que ésta quede determinada. Basta conocer sólo algunas.

Ejemplo 7:

Las derivadas de primer orden de la cadena,

$$C_3 = \{123\}\ \{124\}\ \{135\}\ \{145\}\ \{236\}\ \{245\}\ \{256\}\ \{356\},$$

son:

$$\mathcal{D}_1 C_3 = \{23\}\{24\}\ \{35\}\{45\}\ ,$$

$$\mathcal{D}_2 C_3 = \{13\}\{14\}\{36\}\ \{45\}\ \{56\}\ ,$$

$$\mathcal{D}_3 C_3 = \{12\}\ \{15\}\{26\}\{56\}\ ,$$

$$\mathcal{D}_4 C_3 = \{12\}\ \{15\}\{25\}\ ,$$

$$\mathcal{D}_5 C_3 = \{13\}\ \{14\}\{24\}\ \{26\}\{36\}\ ,$$

$$\mathcal{D}_6 C_3 = \{23\}\ \{25\}\{35\}\ .$$

La cadena queda perfectamente determinada dando solamente $\mathcal{D}_2 C_3$ y $\mathcal{D}_5 C_3$. Pues, reponiendo en éstas, respectivamente, las filas 2 y 5, resulta: 123; 124; 236; 245; 256 y 135; 145; 245; 256; 356. Ocho de las cuales dan la cadena C_3. En cambio, se ve claramente que no bastan $\mathcal{D}_4 C_3$ y $\mathcal{D}_6 C_3$ para determinarla.

Sería interesante investigar cuál es el menor número de cadenas derivadas de primer orden, que es preciso dar, para determinar unívocamente la cadena.

Puesto que, (26, IV), en toda cadena elemental de orden h, todo grupo de h filas pertenece a alguna de sus $h + 1$ permanencias, resulta:

XIII) *Una cadena elemental de orden h, admite todas las derivadas de órdenes $s \leq h$, con respecto a cualquier grupo de sus filas.*

35. **Teorema generalizado de Euler.** — Basándonos en las operaciones con las cadenas de permanencias de una matriz, demostraremos el conocido teorema de Euler generalizado para los politopos convexos cerrados del hiperespacio.

Convendremos en designar, por comodidad, con el símbolo $\binom{n}{i}$, el número combinatorio usual, cuando sea $0 \leq i \leq n$, y cuando sea $i > n$, pondremos $\binom{n}{i} = 0$.

Así, pues:

$$\begin{cases} \binom{n}{i} = \dfrac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-i+1)}{i\,!} & \text{para } 0 \leq i \leq n\,, \\ \binom{n}{i} = 0 & \text{para } i > n\,. \end{cases}$$

Designemos con $\mathcal{N}_i$, el número de cadenas derivadas de orden $i \leq h$, de una cadena no idéntica C_h. Es claro que es por definición (34) y (29)

$$\mathcal{N}_h = N_h\,.$$

Demostraremos que:

I) *El número,*

$$f = 1 - \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_3 + \ldots + (-1)^h \mathcal{N}_h, \qquad [35.1]$$

es invariante, para toda cadena regular no idéntica, en la agregación por cadenas elementales.

En efecto, para $h = 1$, cadenas unitarias, como en éstas, (27), la agregación no hace sino sustituir una fila por otra, el teorema es inmediato.

Sea ahora $h > 1$, $\boldsymbol{C}_h$ la cadena dada y $\boldsymbol{C}'_h$ la cadena resultante, (27). Al número $\mathscr{M}_i$ de cadenas derivadas de orden i de $\boldsymbol{C}_h$, habrá que agregar las $\binom{h}{i-1}$, que contienen la nueva fila agregada (27, II). Luego, será:

$$\mathscr{M}'_i = \mathscr{M}_i + \binom{h}{i-1}, \qquad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, h-1;$$

designando con $\mathscr{M}'_i$ el número de cadenas derivadas de orden i de $\boldsymbol{C}'_h$.

Puesto que en esta operación, se suprime la permanencia común, es

$$\mathscr{M}'_h = \mathscr{M}_h + \binom{h}{h-1} - 1 = \mathscr{M}_h + \binom{h}{h-1} - \binom{h}{h}.$$

Se tiene:

$$f' = 1 - \mathscr{M}'_1 + \mathscr{M}'_2 - \mathscr{M}'_3 + \ldots + (-1)^h \mathscr{M}'_h.$$

Sustituyendo en esta expresión las dos precedentes y teniendo en cuenta que es,

$$\binom{h}{0} - \binom{h}{1} + \binom{h}{2} - \binom{h}{3} + \ldots + (-1)^h \binom{h}{h} = 0 \ , \quad [35.2]$$

resulta:

$$f' = f;$$

y, por lo tanto, probada la proposición.

II) *El número,*

$$f = 1 - \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2 - \mathscr{M}_3 + \ldots + (-1)^h \mathscr{M}_h,$$

es invariante, para toda cadena regular no idéntica, en la sustitución por cadenas elementales.

Habrá que demostrarlo, (28, IX), para el caso $h > 2$.

Sea c el número de permanencias comunes a C_h y a la cadena elemental E_h, empleada, (28), en la sustitución. Se debe tener, [28.1], $1 < c < h$.

El número $\mathscr{H}'_{h-j}$ de derivadas de orden $h-j$ de la cadena resultante, C'_h, es,

$$\mathscr{H}'_{h-j} = \mathscr{H}_{h-j} + \binom{h+1-c}{j+1} - \binom{c}{j+1},$$

para

$$j = h-1, h-2, \ldots, 1, 0;$$

porque cada derivada de orden $h-j$, en la cadena elemental E_h, es común a $j+1$, permanencias; debiéndose tomar tales números combinatorios con la convención hecha al principio de este número.

Se tiene:

$$\mathscr{f}' = 1 - \mathscr{H}'_1 + \mathscr{H}'_2 - \mathscr{H}'_3 + \ldots + (-1)^h \mathscr{H}'_h.$$

Sustituyendo en esta última expresión, la precedente, para los indicados valores de j, y teniendo en cuenta las expresiones análogas a la [35.2] que resultan, se obtiene,

$$\mathscr{f}' = \mathscr{f};$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Probemos finalmente que:

III) *El número,*

$$\mathscr{f} = 1 - \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 - \mathscr{H}_3 + \ldots + (-1)^h \mathscr{H}_h,$$

es invariante en la contracción adecuada de dos permanencias de una cadena regular o singular de orden $h > 2$.

Esto es casi inmediato, puesto que en la contracción adecuada, (33), dos permanencias se contraen en una sola, con lo cual se pierde, en la cadena resultante, (34), una derivada de orden h y también una derivada de orden $h-1$, la que se obtendría derivando la cadena dada con respecto a las $h-1$ filas comunes de las permanencias contraídas. Por lo tanto, no altera el número $\mathscr{f}$ en cada sucesiva contracción adecuada.

De (28, XI); (33, V) y de I, II y III de este número resulta el teorema de EULER:

IV) *Entre todas las cadenas derivadas de orden* 1, 2, 3, ..., **h** *de una misma cadena cerrada no idéntica de orden h, existe la relación:*

$$f = 1 - \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 - \mathscr{H}_3 + \ldots + (-1)^h \mathscr{H}_h = (-1)^h. \quad [35.3]$$

En virtud de (28, XI) y de (33, V), basta demostrar la proposición para una cadena elemental de orden h.

Pero, para ésta se tiene, (34, XIII),

$$\mathscr{H}_i = \binom{h+1}{i}; \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, h.$$

Luego:

$$f = 1 - \binom{h+1}{1} + \binom{h+1}{2} - \binom{h+1}{3} + \ldots + (-1)^h \binom{h+h}{h}.$$

Por otra parte, sabemos que es,

$$\binom{h}{0} - \binom{h+1}{1} + \binom{h+1}{2} - \binom{h+1}{3} + \ldots + (-1)^{h+1} \binom{h+1}{h+1} = 0.$$

De donde,

$$f = 1 - \binom{h+1}{1} + \binom{h+1}{2} - \binom{h+1}{3} + \ldots + (-1)^{h+1} \binom{h+1}{h} = (-1)^h,$$

lo que prueba, (32, IV) el teorema, el cual es válido también para $h = 1$, puesto que las cadenas cerradas unitarias son, (26), elementales.

El teorema de EULER suele escribirse también bajo la forma,

$$1 - \mathscr{H}_h + \mathscr{H}_{h-1} - \mathscr{H}_{h-2} + \ldots + (-1)^{h-1} = 0,$$

equivalente a [35.3] como prueba un simple cálculo (1).

(1) Noticias sobre este teorema pueden verse en el *Repertorio di Matematiche Superiori, II, Geometría* de E. PASCAL, pág. 802.

CAPITULO IV

§ 11 - MORFOLOGIA DE LAS FIGURAS POLIEDRICAS HIPERESPACIALES CONVEXAS

Vamos a ocuparnos ahora del problema fundamental de esta teoría que es el de la clasificación de los sistemas $S_h(m, n)$, normales compatibles, o sea (5), en lenguaje geométrico: la clasificación de las figuras poliédricas hiperespaciales convexas atendiendo a su *forma*. Parecerá superfluo, de primer intento, tal objeto, por cuanto la convexidad de las figuras poliédricas, es ya un carácter distintivo que permite agruparlas en una sola clase.

Pero una clasificación sólo tiene sentido en un cierto orden de ideas. Dentro de la clase, bastante amplia, de *figuras poliédricas convexas*, cabe considerar, todavía, figuras que poseen caracteres morfológicos diferentes. Y es natural que se puede ahondar en este proceso de diferenciación, hasta alcanzar sus propiedades más íntimos, por así decirlo, como son, por ejemplo, las de extensión y tamaño, objeto de la geometría métrica.

Nosotros clasifciaremos dichas figuras prescindiendo de toda propiedad métrica de las mismas. Tendremos en cuenta solamente aquéllas que sirven para determinar, eso que vagamente llamamos *forma de la figura*, y que definiremos con toda precisión.

Entre las varias tentativas de una clasificación morfológica de los poliedros del espacio ordinario, se debe a J. Steiner, la propuesta en el problema siguiente:

Wenn man Polyeder nur in Hinsicht der Art oder Gattung ihrer Grenzflächen von einander unterscheidt d. h. je nachdem diese Dreiecke, Vierecke, Fünfecke u. s. w. sind, so giebt es bekanntlich nur einen vierflächigen, zwei fünfflächige und sieben sechsflächige Körper. Wieviel verschiedene 7-8-9 . . . *-n-flächige Körper sind in dieser Hinsicht möglich?* (1).

Si bien no está, en estas palabras, claramente expresado el concepto de poliedros *distintos*, se comprende lo que el autor quiere decir.

(1) Citado por O. Hermes en *Crell's Journal*, tomo 120, pág. 27-59 y 305-353.

Muchos se han ocupado de este problema (1), limitado al espacio ordinario, sin resolvelor completamente. Por dos razones que creemos fundamentales. Primera: por carecer de un instrumento analítico adecuado que permita determinar todos los poliedros de un dado número de caras, como lo exigía CAYLEY (véase pág. 3). Segunda: por no precisar, con exactitud, qué debe entenderse por poliedros de *igual forma*. El camino analítico utilizado aquí es completamente general y vale para los espacios de cualquier número de dimensiones. Permite, además, determinar todos los poliedros convexos de una dada dimensión y de un número dado de caras, mediante la obtención de sus correspondientes cadenas. En base a éstas, veremos también cómo es posible definir la *forma* por abstracción, de modo que coincida con la noción intuitiva que tenemos de ella. Creemos que toda clasificación de estas figuras, para ser fecunda, debe fundarse en las ideas de STEINER; es decir, tomar como base la forma.

Este problema, interesante de por sí, parece estar relacionado con el ya famoso *de los cuatro colores* (2), en el sentido de que la solución de este último puede hacerse depender de la del primero.

Observaremos, finalmente, que el problema de la clasificación debe ser posteorri al de la determinación de los poliedros, como lo exigía CAYLEY, y como también lo deja entender LEBESGUE en el artículo ya citado. Esa cuestión se resuelve completamente en el presente parágrafo, y se generaliza su solución, al espacio de cualquier número de dimensiones, y no solamente a los hiperpoliedros, sino también a toda figura hiperespacial poliédrica convexa. La segunda cuestión se desarrolla en las páginas que siguen, y, como hemos indicado al principio, se resuelve también. Queda por averiguar la función de la expresión $\Psi'(m)$ que da el número de poliedros distintos sin que sea necesario construirlos efectivamente.

Aunque acerca de este último problema, no resuelto todavía ni siquiera para el espacio ordinario, no indicamos ninguna solución, creemos que el método aquí empleado puede dar buenos frutos.

Por ahora, nos interesa particularmente la exposición general de la teoría de la forma. Para ello será necesario volver a considerar las cadenas y establecer, entre ellas, criterios de comparación.

(1) Véase C. JORDAN, Recherches sur les Polyèdres, *Creell's Journal*, tomo 66, año 1866, pág. 22.

(2) Véase H. LEBESGUE, artículo citado, y también el artículo de A. ERRERA: *Exposé historique du problème des quatres couleurs*, en el Periodico di Matematiche, Serie IV, volumen VII, año 1927, pág. 20.

36. **Cadenas iguales.** Puesto que todas las cadenas de orden $h > 0$ y clase m, están caracterizadas, (32, I, *a*, *b*, *c*), por relaciones entre sus filas y no por éstas en sí; las podremos designar siempre por los mismos m números:

$$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m,$$

cada uno de los cuales representa, a su vez, una fila de la correspondiente matriz. Para indicar que, en una cadena, $C_h\,(m, n)$, una misma fila a_i pertenece a α_i permanencias suyas, escribiremos simbólicamente, $a_i^{(\alpha_i)}$. Como en toda cadena, (32), cada fila pertenece a un cierto número de permanencias, se obtiene así, para cada cadena $C_h\,(m, n)$, no idéntica, una expresión de la forma:

$$\mathcal{G}\,(a) \equiv a_1^{(\alpha_1)}, \ldots, a_i^{(\alpha_i)}, \ldots, a_m^{(\alpha_m)} \qquad [36.1]$$

que llamaremos *grupo* de la cadena $C_h\,(m, n)$, y a cada uno de los números $\alpha_i > 0$, *números característicos del grupo*. Si todos los números α_i son iguales entre sí, se dirá que el correspondiente grupo es *uniforme*.

Ejemplo 1:

La cadena $C_4\,(6, n)$ del *ejemplo 3*, (26), tiene grupo uniforme, en el cual, todos los números a_i son iguales a 6.

Puesto que, (24), en las cadenas unitarias, cada fila pertenece a una sola permanencia, en las binarias a dos, y en las cadenas elementales de orden h, (26, II), cada fila pertenece a h permanencias, resulta:

I) *Los grupos de las cadenas unitarias, binarias, y elementales de orden h, son uniformes; sus números característicos valen respectivamente* **1, 2** *y* **h.**

Es claro que pudiéndose permutar de cualquier manera los números a_i que designan las filas de un mismo tipo, $T_h\,(m, n)$, de matriz, será preciso estudiar qué efecto produce, en una cadena de permanecias de ellas, cualquier sustitución σ, entre todas sus filas.

Sea, entonces, $C_h\,(m, n)$ una cadena no idéntica, $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_m$, sus filas, y

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{\nu_1}\ a_{\nu_2}\ \ldots\ a_{\nu_i}\ \ldots\ a_{\nu_m} \\ a_1\ a_2\ \ldots\ a_i\ \ldots\ a_m \end{pmatrix}, \qquad [36.2]$$

una dada sustitución entre sus m filas.

Aplicar la sustitución σ, a una cadena $C_h\,(m, n)$, significa reemplazar, en cada permanencia de la cadena, las filas que la forman, por sus correspondientes en σ, conservando cada uno de los grupos de filas homólogas que en $C_h(m, n)$ forman permanencias, o componentes de éstas.

Es claro que:

II) *Si se aplica una dada sustitución σ, a una cadena no idéntica, se obtiene una cadena de igual orden y clase que la dada. Sus respectivos grupos tienen los mismos números característicos*; pues esta operación equivale a un cambio de numeración de las filas del correspondiente tipo de matriz a que pertenece la cadena dada.

Ejemplo 2:

La cadena:

$$C = \{1234\}\,\{1236\}\,\{1246\}\,\{1346\}\,\{2345\}\,\{2356\}\,\{2456\}\,\{3456\},$$

tiene el siguiente grupo:

$$\mathcal{G} \equiv 1^{(4)}\,,\ 2^{(6)}\,,\ 3^{(6)}\,,\ 4^{(6)}\,,\ 5^{(4)}\,,\ 6^{(6)}\,.$$

Mediante la sustitución:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 4 \\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \end{pmatrix},$$

se transforma en la cadena del mismo orden y clase,

$$C' = \{3215\}\,\{3214\}\,\{3254\}\,\{3154\}\,\{2156\}\,\{2164\}\,\{2564\}\,\{1564\},$$

cuyo grupo es,

$$\mathcal{G}' \equiv 3^{(4)}\,,\ 2^{(6)}\,,\ 1^{(6)}\,,\ 5^{(6)}\,,\ 6^{(4)}\,,\ 4^{(6)}\,,$$

el cual tiene los mismos números característicos que $\mathcal{G}$.

La cadena $C'_h\,(m, n)$, deducida de otra cadena $C_h\,(m, n)$, mediante una dada sustitución σ, entre las m filas de ésta, se llamará *cadena transformada de $C_h\,(m, n)$, por la sustitución σ*. Cuando sea necesario, la designaremos con la notación $\sigma.\ C_h\,(m, n)$. Es decir:

$$C'_h\,(m, n) \equiv \sigma.\ C_h\,(m, n)\,.$$

Nótese que la cadena transformada de otra puede coincidir con la dada. Tal cosa ocurre seguramente, (26, IV), con todas las cadenas transformadas de una misma cadena elemental.

Diremos que una cadena no idéntica $C_h\,(m, n)$, es *igual* a otra cadena $C'_h\,(m, n)$, cuando existe una sustitución σ, entre las m filas de la primera que la transforma en la segunda.

Convendremos en considerar como *iguales entre sí*, dos cadenas idénticas cualesquiera. Es claro que si es:

$$\sigma.\, C_h\,(m, n) \equiv C'_h\,(m, n')\ ;$$

la sustitución inversa, σ^{-1}, transforma, a su vez, $C'_h\,(m, n')$ en la $C_h\,(m, n)$. Es decir:

$$\sigma^{-1}.\, C'_h\,(m, n') \equiv C_h\,(m, n)\,.$$

Puesto que las sustituciones entre m elementos forman grupo, la igualdad así definida, goza de las tres propiedades que la caracterizan. Para indicar la igualdad entre dos cadenas cualesquiera, idénticas o no, escribiremos, por lo tanto

$$C_h\,(m, n) = C'_h\,(m, n')\,.$$

Se dirá que dos permanencias regulares o singulares son *iguales* entre sí, cuando son iguales las correspondientes cadenas, (30, IV), de sus componentes. Nótese que dos cadenas iguales pueden ser de distintas dimensiones.

Dos cadenas o dos permanencias no iguales, se dirán, con frecuencia, *distintas* la una de la otra.

Cuando dos cadenas son tales que, a cada permanencia singular en una de ellas, corresponde, en la otra, una permanencia singular igual, se dirá que ambas cadenas tienen las *mismas singularidades*. Nótese que la precedente definición de igualdad de dos cadenas, implica un efectivo criterio de comparación, que permite reconocer, en cada caso, cuando dos cadenas dadas, $C_h\,(m, n)$ y $C_h\,(m, n')$, son o no iguales. Basta, para ello, aplicar en una, las m sustituciones entre sus m filas y ver si alguna de sus transformadas coincide con la otra.

(*Concluirá*)

LA ARQUITECTURA MOLECULAR EN BIOQUÍMICA

Por el Dr. CARLOS A. SAGASTUME

PROFESOR TITULAR DE QUIMICA BIOLOGICA EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

(*Conclusión*)

V. — Pigmentos metabolizantes

Los pigmentos clorofílicos cumplen una función esencialmente anabólica.

Debemos aludir brevemente ahora a los pigmentos respiratorios cuyo papel es presidir el metabolismo gaseoso y en especial el del O_2 y CO_2.

Son numerosos los cromoproteídos respiratorios actualmente conocidos. Roche los clasifica así:

Pigmentos respiratorios (Roche). 1934.

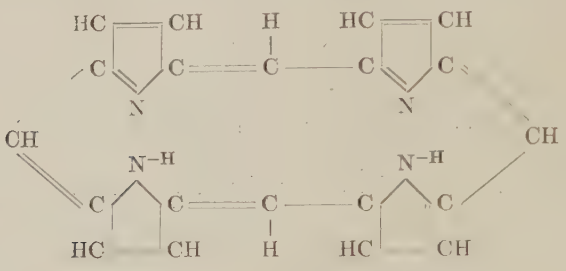
Hemoglobinas	pigmentos sanguíneos *rojos* que contienen Fe. y existen en los vertebrados.
Eritrocruorinas	pigmentos sanguíneos *rojos* que contienen Fe. y existen en muchos invertebrados.
Clorocruorinas	pigmentos sanguíneos *verdes* que contienen Fe. y existen en muchos anélidos.
Hemocianinas	pigmentos sanguíneos *azules* que contienen Cu. y existen en numerosos moluscos y crustáceos.
Hemeritrinas	pigmentos celómicos *marrón-violáceos* que contienen Fe. y existen en ciertos sipuncúlidos.

Pueden también subdividirse en cromoproteídos porfíricos a cuyo grupo pertenecen, por ejemplo, las hemoglobinas, y cromoproteídos no porfíricos entre los que pueden incluirse las hemocianinas y hemeritrinas.

Por razones obvias, nos limitaremos a decir únicamente dos palabras acerca de la hemoglobina, pero sin poder referirnos a sus parientes químicos, pues su estudio genealógico resultaría sumamente largo (Barcroft).

La disección de la molécula de hemoglobina ha demostrado la existencia en ella de un núcleo fundamental que Hans Fischer denominó « *porfina* » y cuya síntesis fué lograda por este sabio hace pocos años.

Porfina (Hans Fischer).



Según modernas investigaciones, la hemoglobina resulta de la unión de la globina con un cuerpo del tipo del heme (Fischer y colaboradores, 1931).

Se trata de cuatro anillos pirrólicos unidos por grupos metínicos y en cuya molécula se nota que los 4 anillos pirrólicos tienen en total 8 átomos de hidrógeno substituibles diversamente y 2 grupos imídicos — NH — con hidrógeno también substituible por metales.

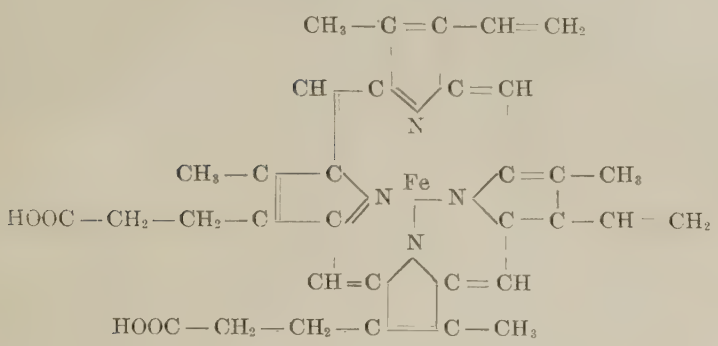
Substituyendo en la molécula de porfina átomos de hidrógeno unidos a carbono por grupos metílicos y etílicos, llega Hans Fischer a las *porfirinas*. Las porfirinas naturales tienen oxígeno en su molécula por la introducción en la misma, de ácidos (succínico, propiónico, etc.).

Las combinaciones de las porfirinas con el hierro se denominan *hemes* (Fischer 1931) si este metal se halla al estado bivalente, *hematinas* si funciona como trivalente.

A las diferentes porfirinas corresponden diferentes hemes y a éstos diferentes hematinas, así: proto, hemato, deuteroporfirinas y sus correspondientes proto, hemato y deuterohemes y proto, hemato y deuterohematinas.

Así el protoheme de las hemoglobinas responde, según Hans Fischer, a la siguiente estructura:

Protoheme de las Hemoglobinas.



(Hans Fischer) $C_{34}H_{32}N_4O_4Fe$.

Sabido es que la hemoglobina impregna el glóbulo rojo, pero no pasa al plasma en que aquel flota. La función del pigmento rojo, es contraer combinación con el oxígeno y transportarlo a las más profundas intimidades del organismo.

Si el oxígeno se hallara simplemente disuelto en la sangre, ésta no podría contener más de 0,36 %. El oxígeno se encuentra al estado de combinación con la hemoglobina formando un compuesto lábil, fácil de disociar y que por diferencia de presión cede rápidamente oxígeno.

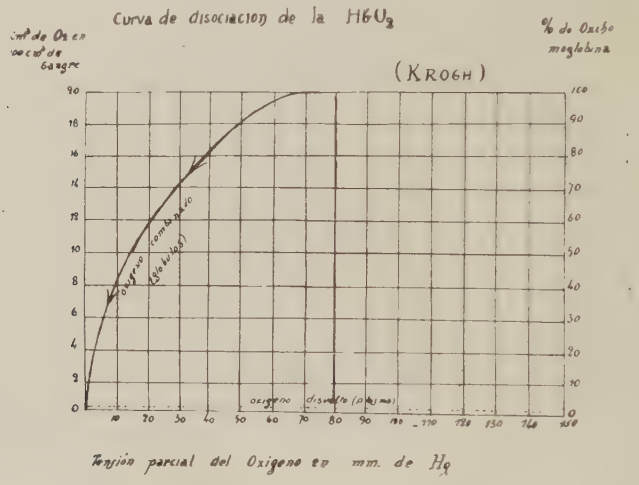
Recordando que 1 gr. de hemoglobina se combina con 1,34 cm^3 de oxígeno, se puede calcular que el organismo humano normal adulto, transporta en el total de su sangre algo más de 1 litro de oxígeno. De esto surge la conclusión que sin hemoglobina la vida es imposible. Si no tuviera hemoglobina la sangre, para transportar permanentemente ese litro de oxígeno se necesitarían 333 litros de plasma. Seríamos en tal caso, fenomenalmente voluminosos desde que pesaríamos cerca de 4500 kilos. Es probable que los hombres nos resignáramos a tal situación; pero ¿y las damas cómo se las arreglarían para mantener la línea?

La hemoglobina es, pues, el cromoproteido que transporta oxígeno del pulmón al tejido. El oxígeno va combinado con la hemoglobina al estado de combinación reversible $Hb + O_2 \rightleftarrows HbO_2$.

Si se trata de una combinación, se verá que con cada átomo de Fe de la molécula de Hb se combinarán 2 átomos de oxígeno; vale

decir, que 56 grs. de Fe de la hemoglobina fijarán 32 grs. de oxígeno. Y eso es lo que en la práctica ocurre.

Si la fijación de oxígeno por la hemoglobina constituye una combinación química, ésta debe responder a la ley de las masas. Para averiguarlo es menester trazar la curva de disociación de la oxihemoglobina. Esta curva se obtiene ubicando en un sistema de coordenadas, sobre el eje de ordenadas, el porciento de O_2 combinado a la Hb y sobre la abscisa la tensión de O_2.



Si la curva de tal disociación responde a la ley de las masas, ella debe ser una hipérbole rectangular, es decir, que debe responder a la ecuación $x \times y = k$ (constante). Ello sucede en realidad. Y si el proceso natural de la fijación de oxígeno y disociación de la HbO_2 se aparta en algo de la ley de las masas, es por la gran concentración de hemoglobina en el glóbulo y por la interferencia de las sales que éste contiene.

Con hemoglobina privada de sales por diálisis y en dilución al 1 %, la ley de las masas se cumple íntegramente.

Pero no solamente el pigmento sanguíneo interviene en el transporte de O_2 del pulmón al tejido, sino que es consecuencia de tal oxigenación el proceso inverso, es decir, el transporte de CO_2 del tejido al pulmón. También es consecuencia el cociente respiratorio y el admirable equilibrio ácido-básico de la sangre, cuyo pH se mantiene normalmente constante, cerca del valor 7.35, gracias a sistemas

de regulación de una gran solidez a la par que de una sensibilidad exquisita.

La oxihemoglobina es un ácido más enérgico que la hemoglobina y por ello cuando la tensión de oxígeno aumenta y se forma más oxihemoglobina, aumenta la acidez y, para evitarlo, capta más álcali, quedan menos bases libres y, por consiguiente, se puede fijar en la sangre menor cantidad de CO_2. Al reducirse la HbO_2 a Hb, ocurre lo contrario. Por tal razón fija más CO_2. Esto repercute, pues, directamente sobre la reserva alcalina. En el hombre adulto normal la hemoglobina se origina con los hematíes, exclusivamente en la médula ósea. Ya hemos dicho que el pigmento se encuentra localizado en los eritrocitos. Después que estas células han cumplido el ciclo de su vida, 30 a 100 días y que se han desintegrado, la hemoglobina se disloca, se simplfica, formando pigmentos biliares. Se admitía que tal dislocación se producía en el hígado. Whipple y otros investigadores han comprobado que los pigmentos biliares se forman también en el bazo.

En punto a la formación natural de la hemoglobina, no podemos ni siquiera entrar a discutir los diversos factores físicos, mecánicos y químicos que concurren al proceso. Hay muchas sustancias minerales y orgánicas que presentan actividad pigmentogenética.

En el laboratorio de la cátedra a mi cargo comprobamos en el transcurso de un trabajo efectuado en colaboración con mi distinguido ex alumno el Dr. Pezzani que en animales que anemizábamos por sangría, la clorofila actuaba tan eficazmente como los extractos de hígado y riñón en la formación de hemoglobina.

VI. — Pigmentos y vitaminas

Hemos ya visto las relaciones genéticas entre el carotene y la vitamina A, relaciones tan íntimas como que el carotene es la previtamina. No es éste el único caso en que se hallan tan cerca un pigmento y una vitamina. Otro tanto parece que ocurre entre las flavinas y la vitamina B_2.

Las flavinas son pigmentos amarillos de fluorescencia verde, ampliamente difundidos en vegetales y animales. Su importancia bioquímica reside en la circunstancia de fijar hidrógeno originando leucoderivados, hidrógeno que así pueden transportar a otros cuerpos.

Hace poco tiempo Banga y Szent-Giörgy describieron la propiedad reversible de fijar y ceder H_2 que posee una flavina del músculo

cardíaco. Posteriormente Warburg y Christian descubrieron en la levadura, el mismo pigmento o un pigmento análogo unido a una proteína; bajo esta forma presenta los caracteres de una diastasa. El pigmento amarillo de Warburg y Christian es capaz de oxidar en presencia de una segunda diastasa incolora y de una codiastasa, el ácido hexosamonofosfórico.

Luego, se ha demostrado la existencia de flavina en la mayor parte de los órganos animales.

El suero de leche, cuya materia colorante había interesado a varios investigadores, constituyó la mejor materia prima para aislar tales pigmentos. Kuhn propuso el nombre de *flavinas* para esos colorantes.

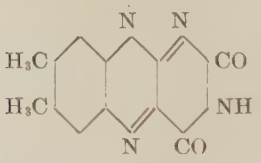
Este mismo autor, trabajando con la vitamina B_2 descubierta en 1926 por Goldberger, había observado que cuanto más puros y activos eran los preparados de vitamina B_2, tanto más intensa era su coloración amarilla y su fluorescencia verde. Ello lo condujo a formular la hipótesis de que la vitamina B_2 era una flavina y que por unión con una proteína, esta vitamina se transforma en el organismo animal en una distasa.

En 1934 obtuvo Kuhn 1 gr. de lactoflavina pura, cristalizada, a partir de 10.000 litros de leche y comprobó que 10 γ del pigmento cristalizado bastan para restablecer el crecimiento normal de ratas alimentadas con una dieta carente de vitamina B_2.

La lactoflavina responde a la fórmula:

Lactoflavina.

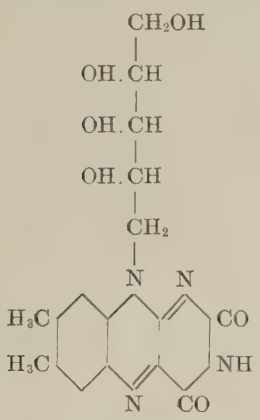
$CH_2(CHOH)_3 . CH_2OH$



Kuhn preparó por síntesis varios isómeros de lactoflavina. A partir de la d-ribosa obtuvo la 6-7 dimetil 9 d-riboflavina cuyos caracteres físicos, químicos y bioquímicos responden exactamente a los de la lactoflavina.

Kuhn había logrado, pues, la síntesis de la vitamina B_2 y prosiguió sus investigaciones para establecer qué nexos bioquímicos ofrece tal vitamina con el fermento amarillo.

Lactoflavina sintética.

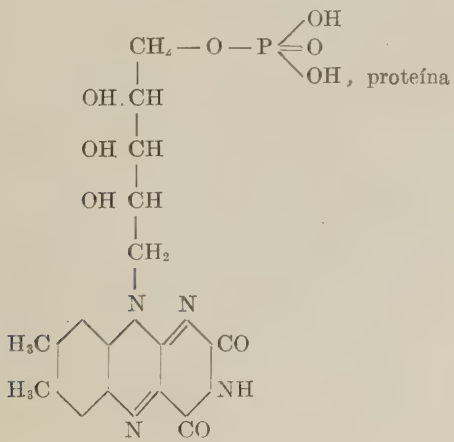


6.7 dimetil. 9. ributil-benzoisoaloxazina o vitamina B_2

Theorell ha obtenido por cataforesis, la diastasa amarilla de la levadura, bajo forma cristalizada. Ella contiene 0,45 % de flavina.

Se puede, dializando contra HCl muy diluído, separar de la diastasa un ácido flavina-fosfórico. Se puede también unir en seguida este ácido flavina-fosfórico con la proteína que no había dializado y se obtiene así de nuevo el fermento amarillo. La proteína incolora sola, puede ser considerada como diastasa, y el ácido flavina-fosfórico termoestable, como codiastasa. Se forma, pues, espontáneamente a partir de la codiastasa amarilla y de la diastasa incolora una nueva diastasa: el fermento amarillo cuya probable estructura sería:

Diastasa amarilla.



La diastasa amarilla y la codiastasa amarilla, presentan, según lo ha comprobado Kuhn, la misma acción sobre el crecimiento, que la lactoflavina.

La síntesis natural de la vitamina B_2 es privilegio de las plantas y las bacterias.

En las plantas verdes actúa probablemente como un diastasa. Está incluída en un complejo de peso molecular elevado.

El alimento vegetal por la cocción o por acción del jugo gástrico, deja en libertad por un lado el soporte coloidal y por el otro la vitamina, que así es reabsorbida.

En cada órgano (hígado, riñón, músculos, etc.) la vitamina libre pasa nuevamente al estado de un fermento amarillo previa unión con el ácido fosfórico y una proteína. La vitamina pasa de nuevo a la leche, al estado libre. Es así como el organismo infantil la recibe. La formación de una distasa amarilla de peso molecular elevado, se repite entonces.

No es necesario encarecer la trascendencia de los descubrimientos del sabio Kuhn. Un grupo antracénico con diversas funciones, constituye el pigmento que es un aceptante de H_2. Si a este pigmento se le adosa una cadena lateral análoga a un azúcar-alcohol, se llega a una vitamina. Por inclusión en el complejo de ácido fosfórico, el todo se transforma en codiastasa y si se liga todo ello a una proteína, se obtiene una diastasa.

Quién hubiera supuesto hace tres años que el inocente pigmento del suero de la leche que con éste era ingerido por los cerdos, iba a resultar una vitamina y probablemente una prediastasa. Era difícil vaticinar tal cambio de jerarquía bioquímica. Esta es una nueva prueba de que en la Naturaleza, todo responde a un plan en cuyo conocimiento apenas nos iniciamos.

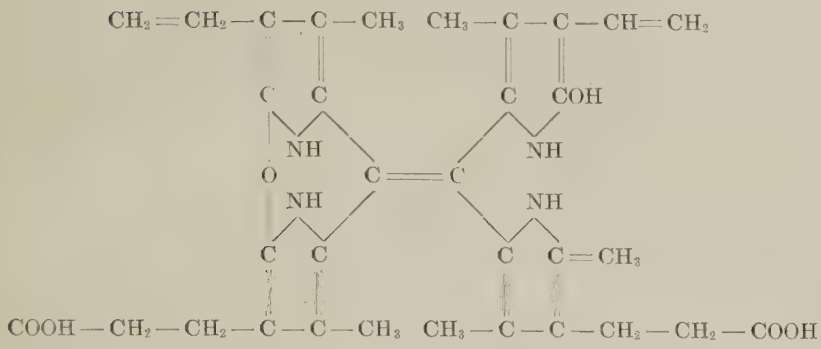
VII. — Pigmentos regresivos

La glándula hepática, entre las diferentes e importantes funciones a su carg,o tiene la biligénica. La bilis está fundamentalmente constituída por sales biliares y pigmentos.

El pigmento biliar más importante es la bilirubina.

Todos los otros colorantes biliares son derivados de la bilirubina: biliverdina (verde), colecianina (azul), bilipurpurina (rojo), coletelina (amarillo), biliprasina (verde), etc. La urobilina es también un derivado de la bilirubina.

Bilirubina (Fischer y Röse).



Los pigmentos biliares proceden, a su vez, de los pigmentos sanguíneos y constituyen el término final del metabolismo de la hemoglobina. De una manera muy esquemática podríamos decir que cuando los glóbulos rojos han cumplido el ciclo de su vida, son destruídos en el bazo y otros órganos. Su pigmento es transformado con amputación del átomo de hierro, en pigmentos biliares, algunos afirman que tal transformación se inicia en el mismo bazo, prosigue en el sistema retículoendotelial, donde se separa el hierro y termina en el hígado.

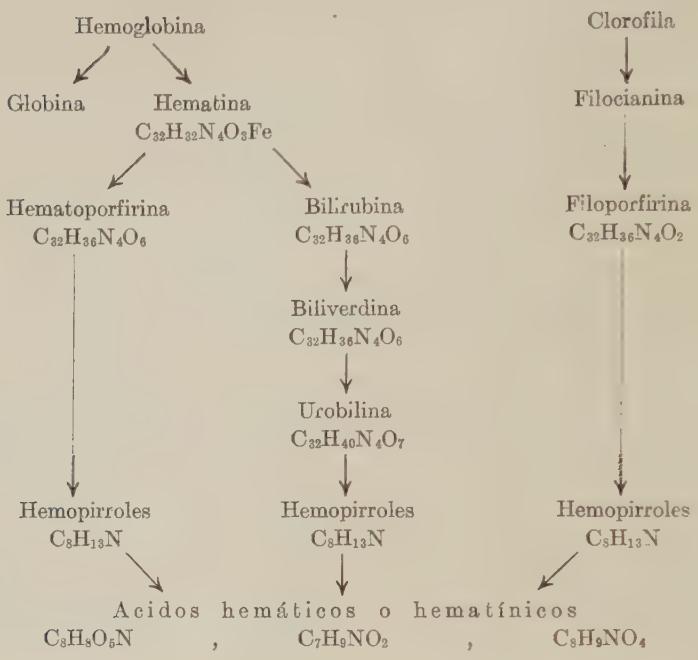
Lo que nos interesa destacar es que los pigmentos biliares están destinados a ser eliminados al exterior con las heces, es decir, que son productos de excreción originados por regresión de los pigmentos sanguíneos. El organismo derrocha pigmentos biliares que para él son ya productos tóxicos, pero economiza el hierro de la molécula de hemoglobina, el cual sigue cumpiendo sus funciones bioquímicas. Esto invita a preguntarse: ¿por qué el organismo realiza tan estricta economía de hierro al propio tiempo que derrocha moléculas tetrapirrólicas? La respuesta no puede hoy ser sino hipotética.

Otro dato interesante es el que concierne a las relaciones genéticas entre los pigmentos clorofílicos, hemáticos y biliares.

Los productos finales de sus respectivos metabolismos (hemopirroles y ácidos hematínicos) son iguales o parientes muy cercanos.

También debemos mencionar entre los pigmentos regresivos importantes, a las porfirinas, moléculas tetrapirrólicas originadas por regresión de los pigmentos sanguíneos después de haber perdido el hierro.

Pigmentos clorofílicos, hemáticos y biliares.



Se discute hoy si las porfirinas naturales son en realidad productos de regresión destinados a ser eliminados del organismo animal o si a la inversa constituyen moléculas de transición sobre cuya base se generaría luego la hemoglobina. Lo cierto es que cuando por exceso de producción o insuficiente eliminación, se acumulan en el organismo las porfirinas, se observan fenómenos de intoxicación denominados *porfirias.*

Las porfirinas son fotosensibilizadores, vale decir, que manifiestan su acción tóxica en presencia de la luz. Cuando se inyecta a un topo porfirinas de las heces o de la orina y se expone al animal a las radiaciones luminosas, experimenta intoxicación más o menos grave según la dosis. La misma cantidad no molesta a un topo mantenido en la oscuridad. Se trata, pues, de sensibilizadores fotodinámicos.

Tienen vinculación las porfirinas con el proceso de la calcificación. Los pigmentos oscuros que en ciertos casos se depositan en huesos y dientes son porfirinas. La patología describe casos diferen-

tes y muy interesantes de porfirias (congénitas, agudas, tóxicas, etc.). En todos ellos, la acción tóxica se registra únicamente en presencia de la luz.

No siendo posible insistir con más ejemplos, pasamos a considerar los pigmentos defensivos.

VIII. — Pigmentos defensivos

Los organismos vivientes, vegetales y animales, disponen de mecanismos diversos para luchar contra el medio externo. La transpiración, por ejemplo, constituye una defensa de plantas y animales contra el calor solar.

Como el organismo humano está expuesto a las agresiones actínicas, tiene organizadas defensas permanentes y puede preparar defensas de emergencia.

Las diferentes radiaciones de origen solar, penetran en forma distinta a través del cuerpo humano. Así, según Guillaume, las radiaciones infrarrojas atraviesan espesores de tejido humano que pueden alcanzar varias decenas de centímetro, las radiaciones de la luz visible espesores de varias decenas de milímetro y los R. U. V. de centésimas de milímetro.

Sabido es que las radiaciones de menor poder penetrante, las U. V., son las más peligrosas.

Contra la agresión de los rayos químicos o U. V. el organismo humano se defiende por una sucesión de filtros: uno mucoso, uno pigmentario y otro dérmico. De los tres, el que tiene realmente importancia es el filtro de pigmentos melánicos. La hipótesis de la defensa pigmentaria explicaría porqué la piel de los habitantes de zonas tórridas es oscura o negra y la de los habitantes de zonas frías es muy blanca.

La teoría de la pigmentación defensiva tuvo por origen el conocido experimento de Finsen quien trazó sobre su antebrazo una banda con tinta china y expuso esa región durante 3 horas a la luz del sol. Se produjo un eritema en la región expuesta al sol, exceptuando la zona cubierta con tinta china.

En un segundo experimento, varios días después del primero, Finsen expuso al sol la misma región y comprobó que se producía un eritema en la zona que antes estuvo protegida por la tinta china y que no estaba ya pigmentada, pero que no se producía en la región pigmentada por la primera agresión actínica.

El problema bioquímico referente a la formación de las melaninas es sumamente interesante y dista mucho de estar esclarecido.

Se designa genéricamente melaninas a diversos pigmentos oscuros o negros que al estado de gránulos se hallan en diferentes células y que generalmente son de origen ectodérmico. Melaninas son los pigmentos de cabellos, piel, de la tinta de la sepia y calamar, de los tumores de los caballos blancos, de la lana, crin y piel de los animales, siempre que la lana, crin y piel sean oscuras o negras.

Practicando un corte histológico en la piel de un negro o de un sujeto de raza blanca, pero de piel muy pigmentada, se observa al microscopio en las células de la capa profunda de los cuerpos mucosos de Malpighi, la presencia de gránulos de melanina. Se acepta que ese pigmento se origina y almacena en órganos especiales designados melanoblastos.

Extraídas por métodos especiales, las melaninas se presentan en forma de polvo pardo oscuro o negro, insoluble en los solventes comunes. Ofrecen gran resistencia a casi todos los reactivos. Se logra disolverlas en álcalis concentrados. El cloro, agua oxigenada y otros oxidantes, les hacen adquirir tonos claros y terminan por decolorarlas.

En punto a su constitución química, es muy poco lo que se sabe.

Contienen C. N. H. O. S. y P. en proporciones muy variables.

Por enérgica hidrólisis (36 horas al autoclave a 120° con 20 veces su peso de NaOH al 10 %) se descomponen las melaninas produciendo tres fragmentos de su molécula originaria: *a*) NH_3 y aminas; *b*) un producto negro brillante que representa el núcleo pigmentario primitivo, y *c*) diversos aminoácidos.

Su origen proteico que denuncia la presencia de esos aminoácidos, es unánimemente admitido. Algunos autores afirman que las melaninas se originan por oxidación y condensación de partes cíclicas de la molécula proteica. Diversas hipótesis se han emitido para explicar cuáles son las sustancias madres de las melaninas. Fürth afirmó hace tiempo que la molécula generadora era la tirosina, que oxidada por influencia de una diastasa, la tirosinasa, producía cuerpos oscuros o negros.

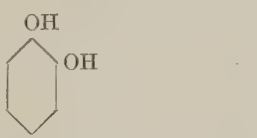
Neuberg, Jäger y otros, fundándose en el hecho de que los extractos de tumores melánicos oxidan y colorean rápidamente la adrenalina, suponen que ésta es la sustancia melanógena.

Bloch observó que los cortes de piel, en presencia de una solución de dioxifenilalanina (por abreviación « dopa ») presentan color ne-

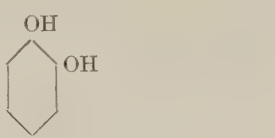
gro en los gránulos de los melanoblastos. Opina que interviene una oxidasa, la dopaoxidasa. La dopa generaría las melaninas. Por su parte, Angeli, Rondoni y otros investigadores, han comprobado que se pueden obtener experimentalmente melaninas in vivo por inyección al conejo gris, por ej., de pirrol o de ácido α carbopirrólico en el tejido subcutáneo. En los conejos blancos no se logra la pigmentación.

Presuntos cuerpos melanógenos.

Tirosina (Fürth)



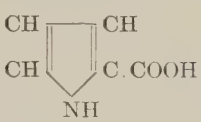
Adrenalina (Neuberg)



Dioxifenilalanina (Dopa) (Bloch)

Melanogénesis experimental « in vivo ».

Acido α carbopirrólico (Angeli)



No podemos detenernos en otros tipos de formación de pigmentos melánicos: melanosis arsenical, melanosis dérmica (enfermedad de Addison), melanosis malárica, pues no constituyen, como en el caso de la melanosis actínica, ejemplos clásicos de defensa pigmentaria. A quien se interese por este asunto, recomiendo el trabajo de Dejust (Capítulo I del libro *Química fisiológica de la piel.* París, 1928).

Tampoco podemos hacer otra cosa que mencionar esos pigmentos que aparecen en los casos de adaptación al medio y que hemos estudiado como ejemplos de mimetismo, de *isocromía.*

IX. — Pigmentos de flores, frutos y bacterias

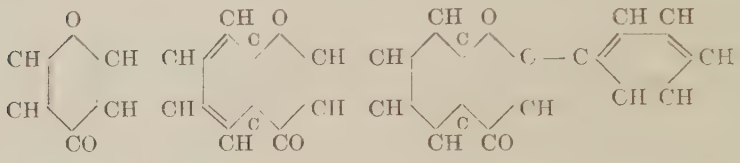
Las hermosas coloraciones de flores y frutos con que se adorna la naturaleza han sido objeto de estudios químicos para conocer su composición e imitarlos por síntesis y de estudios fisiológicos para establecer su función.

Pocas palabras, por razones de tiempo, podemos dedicar a la parte que calificaremos de más elegante de esta exposición. Nos vamos

a referir a los colorantes amarillos flavónicos y a las tonalidades azules y rojas de las flores que son debidas a las antocianinas y a los taninos protocatéquicos. Desde el punto de vista químico, los pigmentos de flores y frutos presentan estrecho parentesco.

Se generan por acoplamiento de la γ pirona con la benzo γ pirona, de donde resulta la β fenilbenzo γ pirona, o sea la flavona.

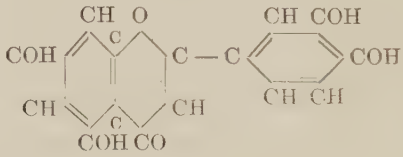
Pigmentos flavónicos.



γ pirona benzo γ pirona β fenilbenzo γ pirona (*flavona*)

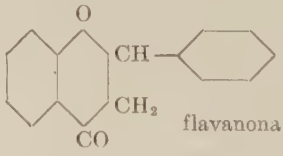
Las oxiflavonas resultan de la substitución en la flavona de átomos de hidrógeno por oxhidrilos fenólicos. Así, por ejemplo, el pigmento de la resedá es la luteolina o tetroxiflavona.

Teiroxiflavona o luteolina.

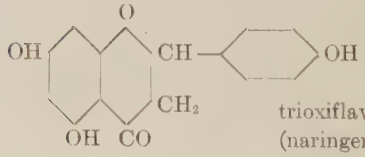


Por adición de dos átomos de hidrógeno a la flavona, se obtiene la *flavanona*. La materia colorante de la naranja llamada *naringenina,* es la trioxiflavanona.

Flavanona y pigmentos flavanónicos.



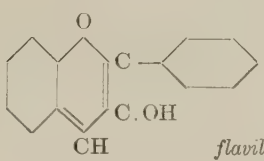
flavanona



trioxiflavanona (naringenina)

De las antocianinas nos limitaremos a recordar que son los colorantes rojizos y azulados de las flores y frutos y que como los pigmentos flavónicos se hallan en los vegetales al estado de glucósidos, unidos a la glucosa, ramnosa, galactosa y a ácidos orgánicos tales como el malónico, oxicinámico, etc. Estos complejos se denominan *antocianidinas*. Las antocianidinas derivan, según Willstätter, de un cromógeno, el *flavilium*, que posee caracteres básicos muy pronunciados.

Cromógeno antocianidínico.



flavilium

Aquí es donde se comprueba el estrecho parentesco químico entre los pigmentos flavónicos y antociánicos a que habíamos aludido. Las investigaciones modernas de Combe, Nicolas, Everest, etc., explican que por procesos de óxido-reducción se generan en las plantas los pigmentos a que acabamos de hacer referencia.

El investigador japonés Kosaka ha comprobado que las plantas expuestas a la luz transpiran más cuanto mayor sea la cantidad de pigmentos antociánicos en sus hojas. Los pigmentos hacen que sea mayor la absorción de calor y por ende la transpiración. La opinión de Kosaka coincide con la de Stahl, Smith, etc.

En punto a los pigmentos bactéricos, glosaré lo que expresábamos con mi distinguido ex alumno, amigo y colega, Profesor Arturo Solari: « ... el problema de la formación de los pigmentos en las bacterias cromógenas, es tan complejo y oscuro como interesante. Complejo y oscuro por la diversidad de factores que concurren a la aparición o desaparición de los colores que ofrecen determinadas especies microbianas e interesante desde el punto de vista fisiológico, bacteriológico y químico.

Interesa a los fisiólogos conocer el mecanismo de la pigmentogénesis y su función en la vida de los microbios. A los bacteriólogos,

los colores de determinadas bacterias sirven para su clasificación e identificación y a los químicos esas mismas sustancias pigmentadas ofrecen vasto campo de investigación en punto a su arquitectura molecular, como a las condiciones en que se originan.

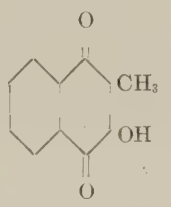
Varios pigmentos bactéricos han sido ya aislados al estado de relativa pureza (prodigiosina) y otros obtenidos en forma cristalizada (piocinina), con lo que se ha facilitado grandemente los estudios experimentales acerca de su función bioquímica.

Algunos investigadores asignan gran importancia a los pigmentos en el proceso de respiración de las bacterias. Friedheim va aún más lejos cuando afirma haber demostrado que el pigmento azul del bacilo piociánico posee la propiedad de catalizar la respiración de este germen. Sostiene que el b. piociánico cultivado en condiciones tales que no permitan la formación de pigmento, se comporta como un anaerobio, casi no consume oxígeno y acusa un cociente respiratorio muy bajo. La adición de piocianina cristalizada aumenta la respiración hasta 2400 % y eleva el cociente respiratorio hasta la unidad.

Destaca Friedheim la circunstancia de que esa acción catalítica del pigmento, sólo se manifiesta sobre los bacilos cuando éstos se ven privados de todo material nutritivo exógeno. Ha hecho extensivas este autor sus investigaciones al Bacillus Violaceus, pequeña bacteria móvil, saprofita del agua, que produce un hermoso color violeta. Siguiendo el método de Wrede para aislar la prodigiosina, obtuvo el pigmento del b. violaceus al estado libre. Consiguió cepas no coloreadas sobre las que en determinadas condiciones experimentales (sin alimento exógeno, pH 7,2 temperatura 24°, etc.) hizo actuar el pigmento violeta. También en el caso de esta bacteria registró marcado aumento del proceso respiratorio (hasta 234 %). Friedheim afirma que el pigmento del b. violaceus se conduce en cuanto a sus funciones fisiológicas como la piocianina. Acelera la oxidación de las sustancias del cuerpo bacilar que parecen ser los lipidos... ».

En las investigaciones efectuadas en mi cátedra en colaboración con el Dr. Solari, logramos hacer aparecer y desaparecer a voluntad el pigmento de una bacteria, el Rhodococus roseus. Establecimos que ciertos glucidos: glucosa, levulosa, maltosa, lactosa y sacarosa, estimulan marcadamente la cromogénesis, como lo hacen también ciertos cationes, en nuestro caso el hierro a cierta dosis.

El phtiocol, pigmento amarillo pálido, aislado por Anderson y Newman en 1933 del b. tuberculoso, es el oxidante de un sistema reversible. El phtiocol es la 2 metil, 3 hidroxil, 1.4 naftoquinona.



X. — Síntesis y conclusiones

Con esta rapidísima revista panorámica a vuelo de avión, me he propuesto hacer resaltar lo que sostenía al iniciarla, es decir, que los edificios moleculares construídos por los organismos vivientes, a los que se les ha reservado mayor jerarquía bioquímica, son los pigmentos.

Ofrecen los pigmentos campo de estudio e investigación del más alto interés bioquímico.

Se conoce la importancia fundamental de los pigmentos clorofílicos, que con dos moléculas tan sencillas como el CO_2 y el H_2O que encuentran en el medio exterior, elaboran diversos glucidos.

Sobre estos cimientos químicos la planta edifica luego los lipidos, entre los que incluimos a los esteroles y fosfatidos; los protidos, los glucósidos, alcaloides, perfumes, colores flavónicos, antociánicos, etc., vitaminas, hormonas, auxinas y diastasas.

Los pigmentos sanguíneos constituyen un maravilloso dispositivo para que una pequeña cantidad de sangre vehiculice el oxígeno indispensable para el metabolismo diario.

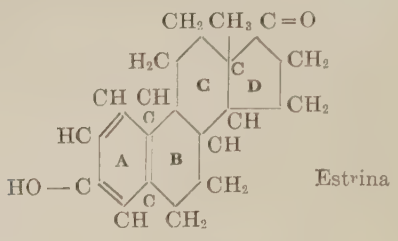
Las notables investigaciones de Kuhn nos presentan interesantísimas e insospechadas relaciones genéticas entre pigmentos, vitaminas y diastasas.

En punto a los pigmentos de flores, frutos y bacterias, la bioquímica tiene la palabra para explicarnos mejor su función natural.

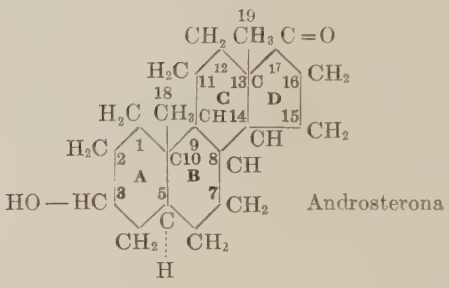
La ciclización molecular en los organismos representa, pues, uno de los procesos bioquímicos de mayor trascendencia.

Se originan así pigmentos, vitaminas, alcaloides, hormonas, etc., y en esa ciclización se comprueba una dirección arquitectónica en la que se pone de relieve la primacía de ciertos núcleos, como el esque-

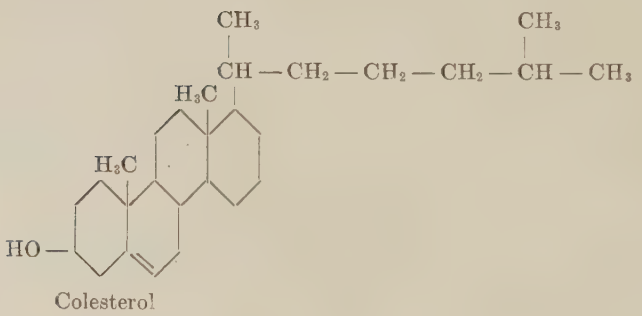
leto del ciclopentenefenantreno que se repite en la molécula de los esteroles, ácidos biliares, geninas, hormonas sexuales, etc.



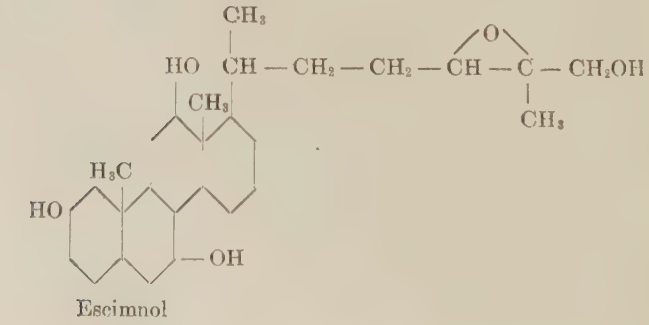
Estrina



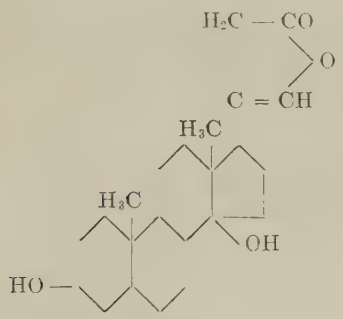
Androsterona



Colesterol



Escimnol



Digitoxigenina

Algunos investigadores sostienen que ciertos perfumes animales y vegetales podrían originarse a partir de las moléculas de esteroles por amputación de la cadena alifática, adquiriendo luego por oxidación en unos casos la función cetónica y en otros la función ácida. También a expensas de los esteroles se originarían algunas hormonas sexuales.

Buenos Aires, Setiembre de 1936.

SOBRE UN NUEVO RADICAL LIBRE Y COLOREADO DERIVADO DEL CIANÓGENO

POR

ENRIQUE V. ZAPPI y RAFAEL LABRIOLA

Prosiguiendo nuestras anteriores investigaciones sobre la constitución de los halogenuros de cianógeno (1), al intentar reproducir con el yoduro de cianógeno las antiguas experiencias efectuadas por Cloez (2), con el cloruro de cianógeno para la obtención de la «cianetolina», nos hallamos frente a un fenómeno que parece haber pasado desapercibido a todos los investigadores, pues no lo hemos encontrado descripto en la extensa bibliografía consultada.

Cuando, en un tubo privado de aire mediante una corriente de nitrógeno, se vierte en una solución de alcoholato de sodio otra de yoduro de cianógeno en éter, se observa que al cabo de algunos instantes el líquido, primitivamente incoloro, comienza a colorearse y toma pronto un color amarillo obscuro.

Si en ese momento se deja entrar una pequeña cantidad de aire o unas burbujas de oxígeno, el líquido se decolora y comienza a aparecer un precipitado. Mas en cuanto todo el oxígeno ha sido consumido la coloración aparece nuevamente, pudiendo repetirse el fenómeno de la coloración-decoloración muchas veces hasta que todo el yoduro de cianógeno y el etilato de sodio hayan reaccionado.

Este fenómeno, completamente comparable al que producen las soluciones que contienen trifenilmetilo, u otros radicales libres ha de ser originado por las mismas causas, es decir por la liberación de un radical de valencia anormal.

Así como en el caso del trifenilmetilo la decoloración por acción del aire es acompañada por la formación de un peróxido insoluble,

(1) ZAPPI, *Anales Asoc. Quím. Argentina*, 1933, **21**, 37; 1931, **19**, 34; 1930, **18**, y 12.

ZAPPI, *Bull. Soc. Chim. France*, 1931, **49**, 397; 1930, **47**, 453, y 537.

(2) CLOEZ, *Lieb. Ann.* 1957, **102**, 355.

en nuestro caso se origina también un precipitado blanco que se halla formado por una mezcla de diversas sales.

En orden de importancia ellas son:

Yoduro, cianuro y carbonato de sodio y sales de amonio.

No hay yodatos ni cianatos.

Entre los compuestos orgánicos se identifican perfectamente el aldehído etílico, la urea, el yodoformo y la cianamida.

Abandonado a sí mismo el líquido, en ausencia de aire, se aclara al cabo de unas cuantas horas, quedando fijo en un tono amarillo.

También se forma un precipitado de un color algo más amarillento, pero cuya composición es idéntica a la del anterior, con la diferencia de contener mayores cantidades de yodoformo.

Unas proporciones convenientes para observar los hechos descriptos, son las siguientes:

Yoduro de cianógeno (0,01 mol.) gr. 1,5. - Eter, cm^3 15.

Sodio metálico (0,02 mol.) gr. 0,46. - Alcohol 96°, cm^3 10.

Las tentativas para fijar el radical no nos han dado por ahora ningún resultado positivo y en consecuencia para explicar lo que sucede es preciso tener en cuenta las condiciones en que la reacción se efectúa.

La presencia ed alcoholes primarios o secundarios es indispensable, pues la reacción no se realiza con los alcoholes terciarios, ni con metílico, bencílico o con fenol, es decir con alcoholes no oxidables.

El sodio, el potasio, el zinc o el mercurio al estado metálico y en medio etéreo, no producen la reacción observada.

Con el mercurio se comprueba la formación de yoduro y cianuro de mercurio.

Tampoco depende exclusivamente de la función nitrílica, pues ni el benzo-nitrilo ni el aceto-nitrilo la provocan.

No es debido a la acción del yodo positivo, que pudiera formar algún hipoyodito inestable y coloreado, pues la adición de soluciones de ácido hipocloroso vertido sobre el alcoholato en alcohol adicionado con pequeñas cantidades de yoduro de sodio, no producen el fenómeno observado.

Tampoco lo originan, ni las soluciones de yodo, ni de cloruro de yodo o de yodoxicianógeno, compuestos todos ellos que contienen yodo positivo.

Como ni el cloruro ni el bromuro de cianógeno, tampoco producen el fenómeno observado, no queda más explicación que atribuirlo

a la estructura propia del yoduro de cianógeno al cual según nuestros estudios anteriores (1), le corresponde una constitución nítrica [I], en oposición a la del cloruro de cianógeno, que debe ser isonitrílica [II].

$$\underset{[I]}{I - C \equiv N} \qquad\qquad \underset{[II]}{C = N - Cl}$$

Para no complicar aún más la explicación de los hechos, introduciendo consideraciones basadas en las fórmulas electrónicas de los halogenuros citados, construiremos nuestra interpretación sobre las estructuras clásicas que hemos adoptado.

Teniendo en cuenta, además de los cuerpos cuya formación comprobamos, el hecho experimental de que la reacción de coloración, exige dos átomos de sodio por cada molécula de yoduro de cianógeno para producirse totalmente, explicamos la génesis del radical coloreado mediante una interpretación que comprende las siguientes fases:

1º — El alcoholato de sodio cede el metal, formándose un complejo de adición con el yoduro de cianógeno, al tiempo que los etoxilos se dismutan en alcohol y aldehído:

$$2\ C_2H_5ONa + I - C \equiv N = \underset{\substack{| \\ Na\quad Na \\ \text{Complejo de adición}}}{I - C = N} + C_2H_5OH + C_2H_4O$$

2º — El complejo de adición cede yoduro de sodio y se origina el radical de valencia anormal y coloreado, que después de unas horas se decolora por reordenarse en cianuro de sodio:

$$\underset{\substack{| \\ Na\quad Na \\ \text{Complejo de adición}}}{I - C = N} \longrightarrow NaI + \left[\underset{\substack{| \\ Na \\ \text{Radical libre (Coloreado)}}}{\rangle C = N} \quad \acute{o} \quad \cdots C \equiv N \cdots \underset{\substack{| \\ Na \\ \text{Radical libre (Coloreado)}}}{} \right] \xrightarrow{+O_2} \begin{cases} \underset{\text{Cianuro de sodio (Incoloro)}}{Na^+\ (CN)^-} \\ \underset{\text{Peróxido del radical (Incoloro)}}{O_2\ (CNNa)_2} \end{cases}$$

3º — El color desaparece por entrada de aire, cuyo oxígeno forma con el radical un peróxido inestable, que se hidroliza rápida-

mente, pasando por ácido carbámico, para dar carbonato de sodio y amoníaco:

$$O_2(CNNa)_2 + 4\,H_2O \longrightarrow 2\,CO\begin{cases} OH \\ NH_2 \end{cases} + 2\,Na(OH) \longrightarrow CO_3Na_2 + \begin{cases} 2\,NH_3 \\ H_2O \end{cases}$$

4º — Otra porción de peróxido del radical se combina con el amoníaco para dar urea:

$$O_2(CNNa)_2 + 2\,NH_3 + 2\,H_2O \longrightarrow 2\,CO\begin{cases} NH_2 \\ NH_2 \end{cases} + 2\,Na(OH)$$

Nos permitimos reservar por ahora los razonamientos en que fundamos la estructura propuesta para el nuevo radical aislado, por considerar prematura una discusión más profundizada de la cuestión.

Pensamos que dentro de la sencillez de su composición química el nuevo radical, ya sea con carbono bivalente o con el carbono trivalente y el nitrógeno tetravalente, constituye un caso único y que la determinación de su fórmula de estructura ha de presentar todas las dificultades de un verdadero enigma.

Entretanto proseguimos nuestros trabajos con la esperanza de fijar el nuevo radical en una forma estable que permita estudiarlo con seguridad.

Contribución Nº 21
Departamento de Química Orgánica
Facultad de Química y Farmacia
La Plata (Argentina)

HESPERIOIDEA ARGENTINA VII

ESPECIES Y PROCEDENCIAS ADICIONALES PARA LA FAUNA ARGENTINA

Por KENNETH J. HAYWARD

F. R. E. S., F. R. G. S., F. Z. S.

Pyrrhopyge zenodorus Godm. y Salv.

1893 Godman et Salvin, « Biol. Centr. Amer Rhop. », 2: 274, Pl. 73, figs. 1-3.
1931. Bell, « Journ. N. Y. Ent. Soc. », 39: 428, Pl. 35, fig. 10 (genitalia).

Alas negro-azuladas, orlas blancas, oscuras hacia el ápice del ala anterior. Cabeza, palpos, parte anal, rojo-anaranjados; collar rojo; patagia, tégula y pectus negro-azulados.

Patria: Méjico, Guatemala, Costa Rica, Perú, Honduras Británica y Argentina. ♂ en Col. Hayward, ex col. Bosq (Misiones) y ♀ en la col. Museo Argentino de Ciencias Naturales de Posadas (Misiones).

Pyrrhopyge pelota Plötz.

Nueva procedencia: el Territorio del Chaco (Fontana, *Daguerre*, Nov. 1934, en col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pyrrhopyge styx Mschlr.

1878. Moschler, « Verh. Zool. Gesel. Wien », 28: 113.
1879. *anina* Plotz, « Stett. Ent. Zeit », 40: 583 (como sinónimo de *styx*).
1931. Bell, « Journ. N. Y. Ent. Soc. », 39: 469, Pl. 39, fig. 47 (genitalia).

Alas negro-verdosas, las orlas blancas, oscuras hacia el ápice del ala anterior y rojas en el ángulo anal. La parte anal del ala posterior roja. Cabeza, palpos, collar y extremidad anal rojos; pectus, patagia y tegulae negro-azulados.

Patria: Colombia, Bolivia, Brasil y Argentina. ♂ en col. Hayward, ex col. Bosq, de Loreto en Misiones.

Mysoria pallens Mab. fa. **venezuelae** Scudd.

Nueva procedencia: Concordia, Entre Ríos (*Hayward*, II, 1938).

Goniurus proteus L.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, *P. Benson*).

Goniurus dorantes Stoll.

Nueva procedencia: Chaco (*Daguerre*, x-xii, 1935, en col. Mus. Arg. Ciencias Nat.).

Goniurus eurycles Latr.

Nueva procedencia: Salta (Col. Mus. Arg. Ciencias Nat.).

Goniurus evenus Mén.

En algunos ejemplares se encuentra un punto del color de fondo sobre la faja blanca transversal del ala anterior en su faz superior sobre la nervadura M3. Hay un ejemplar de esta variación de procedencia Misiones en la colección del Museo Argentino de Ciencias Naturales.

Nascus ocellatus Hayw.

Nuevas procedencias: Tucumán (col. Breyer) y Salta (col. Rosheweigh en col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Oechydrus ochrilinea Schaus.

1902. Schaus, « Proc. U. S. Nat. Mus. », p. 429.

Difiere de *Oechydrus chersis* Herrich-Schaffer por tener la faja transversal del ala anterior de color amarillo en vez de blanco.

Patria: Perú y Argentina. Salta, col. Hayward.

Pythonides scybis Godm. et Salv.

1894. Godman & Salvin, « Biol. Centr. Amer. Rhop. », 2: 363 con fig.

Pardo oscuro con un matiz violeta. En el ala anterior hay tres puntos hialinos subapicales en línea oblicua distal y otro en el disco del ala. La base de ambas alas más oscura y el ala postbasal del ala anterior con unas manchas redondeadas de pardo muy oscuro. Además el área costal es de este color, terminándose en una manchita basad a los puntos hialinos subapicales y continuadac omo una línea en forma curva hasta el punto discal. En ambas alas hay una faja oscura ante-marginal. En el ala posterior hay una línea fina e irre-

gular postdiscal. En la faz inferior el color es más claro y la mitad anal del ala posterior se encuentra cubierta con escamas gris-azules. Hay áreas pardo claras en el ala anterior a $\frac{1}{2}$ costa, después de los puntos subapicales y en el ápice. En la mitad exterior de la mitad inferior de esta ala el color es también claro.

Patria: Méjico hasta Bolivia y en la Argentina de Puerto Bemberg en Misiones (Hayward).

Xenophanes tryxus Cr.

Nueva procedencia: Córdoba (col. Ruschew en col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pholisora fungoides (Hayw.)

1933. *Systasea* (?) *fungoides* Hayward, « Rev. Soc. Ent. Arg. 5: 243, lám. 26, fig. 8, y lám. 20, fig. 12 (genitalia).

Esta especie debe ser colocada en el género *Pholisora* Scudder.

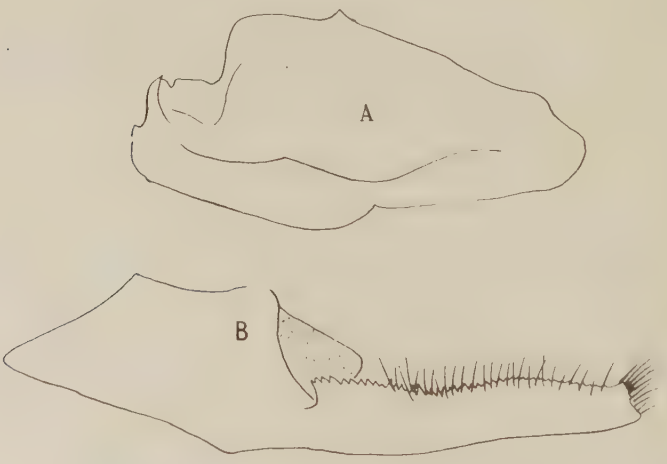
Pholisora dentivittata (Hayw.)

Nueva procedencia: Misiones (col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pholisora vulgaris (Hayw.)

Nuevas procedencias: Tucumán y Chaco (Daguerre). (Col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Camptopleura thrasybulus F. Fig. 1.



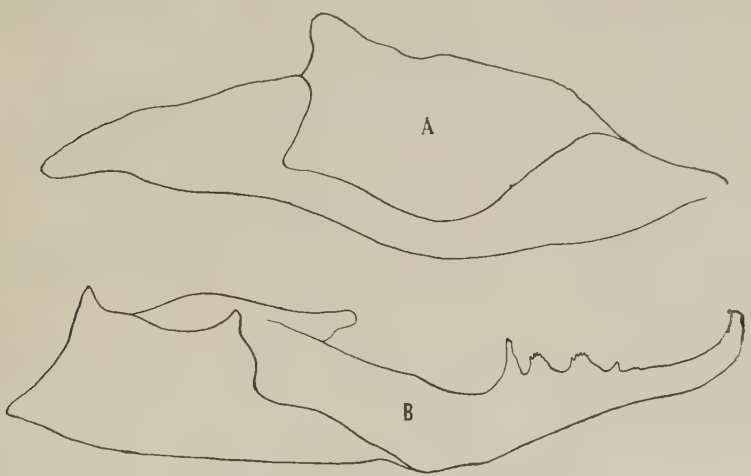
1. — *Camptopleura thrasybulus*; válvulas (a) derecha y (b) izquierda.

Nueva procedencia: Misiones (Hayward).

Camptopleura theramenes Mabille. Fig. 2.

1877. Mabille, « Petit Nouv. Ent. », p. 166.

Es muy parecida a *thrasybulus*, generalmente algo más grande y de un color de fondo pardo más claro, el diseño menos azul (más grisáceo), menos resaltante, y el borde externo del ala anterior



2. — *Camptopleura theramenes*; válvulas (a) derecha y (b) izquierda.

o sin diseño o con el diseño muy reducido. No tiene los puntos y manchitas del color de fondo anillados con líneas azules (y por lo tanto muy resaltantes) que se encuentran en *thrasybulus*.

Difiere principalmente en su faz inferior, que es casi color pardo café y sin el diseño de puntos y manchas oscuras y gris-violetas que se encuentran en *thrasybulus*.

Se puede separar las dos especies con facilidad comparando los genitales de sus machos. Hay un dibujo de los genitales de *theramenes* en *Biologia Centrali Americana* Rhopalocera 2.

Patria: Méjico hasta el sur de Brasil y de Misiones en la Argentina.

Gorgythion pyralina Mschlr.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Chiomara asychis Cr.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, P. Benson).

Erynnis funeralis Scudd.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo, Col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Erynnis gesta H-S.

Nueva procedencia: Salta (Daguerre, Metán, 1935, en col. Mus. Arg. Ciencias Nat.).

Heliopetes pastor Fldr.

Nueva procedencia: Salta (col. Mus. Arg. de Ciencias Nat.).

Pyrgus orcus Cr.

Nueva procedencia: Territorio del Chaco (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Pyrgus notata Blanch.

Nueva procedencia: Santiago del Estero (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Atrytone mella Godm. et Salv.

Nueva procedencia: Corrientes (col. Rosheweig en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Lerodea dysaules Godm. et Salv.

En *Rev. Soc. Ent. Arg.* 6: 125 (1934) anoté esta especie como dudosa para la fauna argentina, basando mi anotación sobre Giacomelli, *Enum. Sist. y Anot. sobre los Lep. de Villa Cabrera, Córdoba, Rev. Univ. Córd.* 10, 1923.

Durante los últimos meses han pasado por mis manos varios ejemplares de *Lerodea* clasificados por el Prof. Giacomelli como *dysaules* Godm. y Salv., pero todos resultan ser de la especie *tesera* Schaus. Por lo cual es probable que *dysaules* (habitat Méjico y Arizona) no vuele en la Argentina. (El nombre correcto de *dysaules* (Godm. & Salv. 1900) es *arabus* (Edwards, Pap. 2: 26, 1882).

Lerodea eufala Edw.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, P. Benson).

Calpodes ethlius Cr.

Nueva procedencia: Pampa Central (Colonia Barón, P. Benson).

" Prenes " nero F., fa. **fufidia** Hew.

Nuevas procedencias: Tucumán (Tafí Viejo) y Salta (Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

" Prenes " nyctelius Latr.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Thespieus argentina Draudt.

Nueva procedencia: Tucumán (Tafí Viejo y Tucumán, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Thespieus xarippe Btlr.

Esta especie fué mencionada como de la Argentina en *Hesperioidea* III, que aparecerá durante el transcurso de este año. Nueva procedencia. Buenos Aires (Zárate, col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Thespieus ethemides Burm.

1878. *Thracides ethemides* Burmeister, « Descr. Phys. Rép. Arg. », 5: 279.
1923. *Thespieus dissultus* Draudt, en « Seitz Macrolep. », 5: 954, Pl. 185 a.

Durante la revisión de la colección de *Hesperiidae* del Museo Argentino de Ciencias Naturales de Buenos Aires, encontré el tipo de la *Thracides ethemides* Burmeister. Es un macho de Misiones.

Con este descubrimiento es ahora posible colocar esta especie del Dr. Burmeister en el género al cual corresponde, o sea *Thespieus* y de comprobar que se trata del mismo insecto descripto posteriormente por Draudt como *dissultus*.

Cobalus mubevensis Bell.

1931. Bell, « Journ. N. Y. Ent. Soc. », 39: 523, Pl. 30, fig. 1 (genitalia).

♀ Color de fondo pardo. En el ala anterior hay tres puntitos subapicales en hilera oblicua (a veces falta uno o todos), y en el fin de la célula dos puntos blancos hialinos algo lineales. En el disco

del ala se encuentra una manchita cuadrada generalmente cóncava en su lado distal y otro chico y redondeado más distad en la segunda célula mediana. Debajo de la mancha cuadrada hay una cuña de color más claro, algo amarillento en algunos ejemplares. En el ala posterior hay rastros de una hilera postdiscal de puntitos claros.

El diseño de la faz inferior es igual al de la faz superior, pero sobre un fondo algo más claro, las manchas y puntos más grandes, especialmente en el ala posterior, donde la hilera postdiscal está bien marcada, el punto anal lo más grande, y donde también se encuentra en la célula discoidal un punto pequeño claro. Expansión alar ♀♀ 32-34 mm.

Habitat. Brasil, Paraguay y Argentina. Mis ejemplares argentinos son de Misiones.

Euroto compta Btlr.

Nueva procedencia. Salta (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Género **Mnasilus** Godm. et Salv.

1900. Godman & Salvin, « Biol. Centr. Amer. Rhop. », 2: 569.

Sin estigma; tibias medianas, con espinas.

Se puede distinguir este género nuevo para nuestra fauna, fácilmente de los demás géneros vecinos por tener un pincel de pelos en la faz superior del ala anterior, arriba de la nervadura analis.

Mnasilus pencillatus Godm. et Salv. Fig. 3.

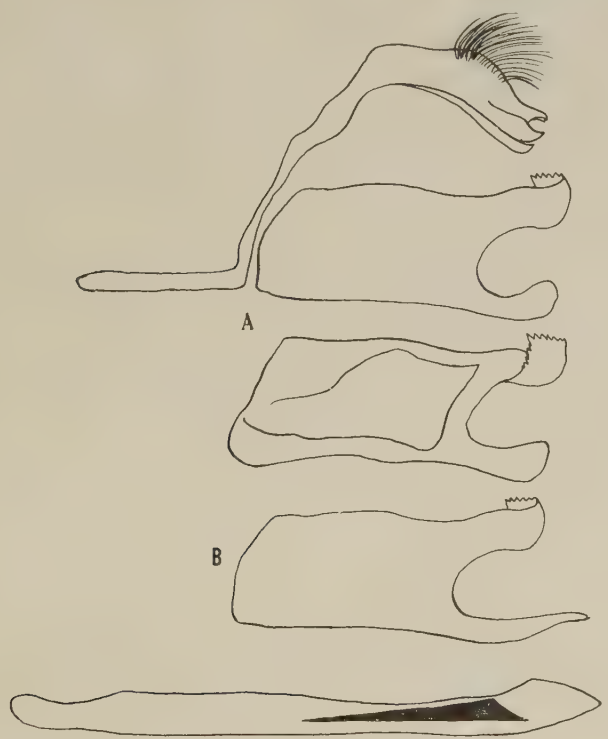
1900. Godman & Salvin, « Biol. Centr. Amer. Rhop. », 2: 570. Pl. 100, figs. 39-42.

Color de fondo pardo negruzco, en algunos ejemplares más bien pardo. Pelos de la cabeza, base de las antenas, tórax, abdomen y base de las alas de pardo amarillo-ocre. Ala anterior con una hilera oblicua de manchas amarillentas entre el ápice y medio del margen interior, siempre muy indistintas, y por lo general se ven bien solamente las dos manchas en los ápices de la célula mediana inferior y la cubital superior. Las orlas más claras que el fondo.

La faz inferior similar, color de fondo algo más claro, la costa del ala anterior hasta su mitad algo amarillento, el disco de esta ala negruzco.

El ala posterior con una hilera mediana de pequeños e indistintos puntos claros paralelos al margen próximo. Expansión alar 27 mm.

Se puede distinguir este insecto de los demás parecidos por el pincel de pelos que se encuentra sobre la nervadura analis del ala anterior en su faz superior.



3. — *Mnasilus pencillatus*; (a) Argentina y Paraguay y (b) válvulas de ejemplares de la Guayana Británica.

Habitat. — Méjico hasta Brasil y Argentina. Tengo ejemplares de la Guayana Británica, Paraguay y Misiones en la Argentina.

Megistias monestes Schaus.

Nueva procedencia: Corrientes (Hayward).

Megistias tripunctata Latr.

Nueva procedencia: La Rioja (col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Megistias erythosticta Plötz.

1883. Plötz, «Exot. Schmett. », 20, Hesp. Tab. 483.
1924. «*Dalla cyclosticta*» Hayward, Rev. Ent. Soc. Arg». 6: 106, Lám. 5, fig. 1.

Al recibir un macho de esta especie he encontrado que se trata de *Megistias erythosticta* Plötz, y no *Dalla cyclosticta* Dyar como yo había clasificado (*loc. cit.*) sobre una hembra en mal estado. Por lo cual se debe eliminar la especie *cyclosticta* de la lista argentina. (Hay una observación sobre este insecto en mi *Hesperioidea Argentina* III, inédita).

Megistias noctis Plötz. Fig. 4.

1883. Plötz, « Exot. Schmett. », 20 Hesp.

4. — *Megistias noctis* (Argentina).

Color de fondo pardo oscuro, el ala anterior con rastros de tres puntos subapicales y tres pequeñas manchas discales en nilera oblicua, todos formados de colecciones de escamas amarillentas.

La mitad basal de la costa también salpicada con estas escamas amarillentas.

La faz inferior pardo negruzca, la mitad costal del ala anterior bien amarilla, y toda el ala, con excepción del disco y margen interior y toda el ala posterior, casi completamente cubierta de escamas de color amarillo hasta ocre en forma que tiene un tono algo dorado. Expansión alar 28-29 mm.

Patria: Tengo o he visto ejemplares de las Guayanas Británicas, Perú, Panamá, Paraguay y Argentina (Posadas, Misiones).

Vorates pseudecorus Hayw.

Nueva procedencia: Catamarca (col. Rosheweigh en col. Mus. Arg. de Ciencias Naturales).

Concordia, 27 de febrero de 1938.

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA CIRCULACIÓN ATMOSFÉRICA

Por EMILIO L. DÍAZ

SUMARY

This work was made in three parts, first, is relating to conections between solar radiation with the atmospheric circulation; relations between upper winds and preassure evolution on Southern South America and Oceans, finding a correlation with solar radiation and upper winds in tropical zone, deducing from these facts the following conclutions:

1) Increasing solar radiation, increases upper wind velocity on tropical zone and some specially situated station in temperate zone simultaneously; to the others in a lag of one, two or three days.

2) A maximum wind velocity in upper levels on C. Redentor and Noronha is closely followed by a disminuition of preasure in central Mediterranean region of Argentina, and four days after the territory is ocupied by a action zone, augmentating the preassure (isocoeficient curves are drawed).

Second, is about the influence in Argentine barometric field, exerced by spots born in the center of solar disks.

Third, is refering, to facts preceding the intense winter anticiclones crossing Argentina that provocs rain and snow fall in its front ahead.

El presente trabajo resume algunas investigaciones practicadas por el autor en las relaciones que ligan la evolución de la presión, en la zona sur de Sud América, con la circulación atmosférica; fenómenos que preceden a los intensos anticiclones invernales argentinos; así como las variaciones de presión que suceden al nacimiento de una mancha o grupo de manchas en la zona central del disco solar.

Para el estudio de las relaciones entre la circulación atmosférica, y la presión en el sur de Sud América, se emplearon dos estaciones aerológicas, una Fernando de Noronha (Brasil), situada muy próxima al Ecuador, en latitud 4° Sur y longitud 32° W, y otra, Cristo Redentor (Argentina), en la zona templada (latitud 33° Sur y longitud 70° W). Se consideró como factor representativo de la in-

tensidad de la circulación atmosférica, la velocidad del viento a 3000 m. en Noronha, y a 6000 m. de altura en Cristo Redentor, observaciones hechas a las 8,00 horas; el nivel de 3000 metros fué elegido para Noronha, por ser el más alto para el cual los datos son suficientemente numerosos como para relacionarlos con las otras variables consideradas; a niveles superiores, la cantidad de valores disponibles es mucho menor, y su utilidad, por tanto, más reducida. Hacemos notar que hubiéramos deseado disponer de observaciones a mayor altura en esa estación, y, si ello hubiera sido posible, la velocidad del viento en la base de la estratosfera.

En lo que respecta a la estación argentina de Cristo Redentor, las velocidades del viento son las registradas a 6000 metros de altura, habiéndose efectuado el cálculo de correlación entre la velocidad del viento a esa altura y la presión en nueve estaciones sudamericanas, cuyos resultados están consignados en el cuadro I; los coeficientes de correlación fueron determinados para los días 0, 1, 2, 3 y 4, siguientes a los valores del viento; se dibujaron luego las curvas de isocoeficientes que se muestran en las figuras 1, 2, 3, 4 y 5; los coeficientes están basados en las observaciones realizadas desde el 1° de Junio de 1936 al 31 de Mayo de 1937, con un total de 216 valores relacionados por estación.

Para el intervalo comprendido entre el 1° de Junio de 1936 y el 30 de Noviembre de 1936 se calculó el coeficiente de correlación entre la radiación solar (valores diarios encontrados por la Smithsonian Institution) y la velocidad del viento a 6000 m. en Cristo Redentor, con el siguiente resultado:

Defasajes	Coeficientes	$\frac{r}{e}$
0 día	+ 0.37	6.3
1 día	— 0.12	1.7
2 días.	— 0.31	4.9

con un total de 95 valores empleados.

Un cálculo de correlación efectuado durante el mismo lapso de tiempo entre la radiación del sol y la velocidad del viento a 3000 m. de altura en Fernando de Noronha arrojó los siguientes resultados:

Defasajes	Coeficientes
0 día	+ 0.16
1 »	— 0.15
2 días.	— 0.22
3 »	+ 0.05
4 »	+ 0.06

Estos resultados nos conducen a análoga conclusión que la obtenida en otros trabajos anteriores, sobre el incremento que se produce en la velocidad de la circulación atmosférica como consecuencia del máximo de radiación solar (incremento que se nota con defasajes de 0,1 y 2 días con respecto al solar).

La correlación de las velocidades del viento superior, entre la estación tropical y la templada, da:

Defasajes	Coeficientes	$\frac{r}{e}$
0 día.	+ 0.24	3.8
1 »	— 0.03	
2 días.	— 0.11	
3 »	+ 0.10	

Número de valores relacionados = 114.

hecho que muestra que el activamiento de la circulación es simultáneo en ambas estaciones, siendo la distancia geográfica entre ellas de 2700 millas marinas.

La situación de Cristo Redentor es una situación especial, que puede suministrar datos de interés; está al este del anticiclón permanente del Pacífico Sur, sobre una alta cordillera de montañas que prácticamente separa el océano Pacífico de la masa continental del sur de Sud América, la que se extiende hacia el lado oriental.

Veamos ahora cómo se propaga la variación de la velocidad del viento a 6000 metros sobre la zona central-este argentina; las correlaciones efectuadas entre la velocidad del aire en Cristo Redentor a 6000 metros de altura, y los datos análogos hallados en Buenos Aires, Paraná y Junín (estaciones situadas entre los 32° y 35° sud, y con una longitud más o menos igual), dieron.

Defasajes	Coeficientes	$\frac{r}{e}$
0 día	— 0.18	
1 »	— 0.07	
2 días	+ 0.25	4
3 »	+ 0.16	

Número de valores relacionados = 111.

Es decir que las variaciones mencionadas se propagan desde el oeste hacia el este y con una velocidad tal que dos días después alcanza la zona norte de Buenos Aires.

Analizaremos a continuación variaciones en la presión en la región sud de Sud América; siguen a los de la velocidad del viento en altura en Cristo Redentor y en Noronha.

Se ha efectuado el cálculo de correlación entre el viento superior y la presión en nueve estaciones, durante el año que va desde el 1° de Junio de 1936 al 31 de Mayo de 1937, y los resultados finales están consignados en el siguiente cuadro.

CUADRO I

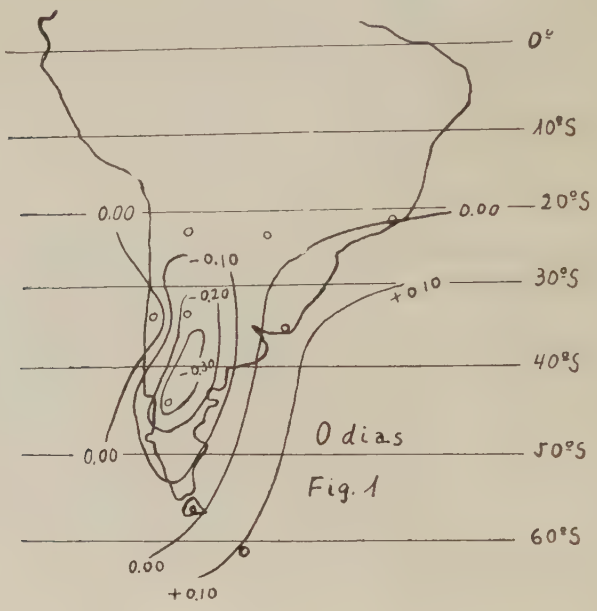
Cuadro resumen de los coeficientes de correlación determinados entre la velocidad del viento a 6000 *metros de altura en Cristo Redentor (lat.* 33° *S y long.* 70° *W) y las siguientes estaciones. (Todas las latitudes son Sud y las longitudes Oeste).*

Defasajes	Orcadas $\varphi=61°$ $\omega=45°$	Ushuaia $\varphi=55°$ $\omega=68°$	Bariloche $\varphi=41°$ $\omega=72°$	V. Mercedes $\varphi=34°$ $\omega=65°$	S. de Chile $\varphi=33°$ $\omega=71°$
0 día.	+ 0.11	— 0.02	— 0.34	— 0.25	+ 0.07
1 »	+ 0.06	— 0.11	— 0.27	— 0.22	+ 0.02
2 días	— 0.09	0.00	+ 0.18	+ 0.16	— 0.02
3 »	— 0.05	+ 0.03	+ 0.35	+ 0.27	+ 0.12
4 »	+ 0.01	+ 0.05	+ 0.18	+ 0.08	— 0.05

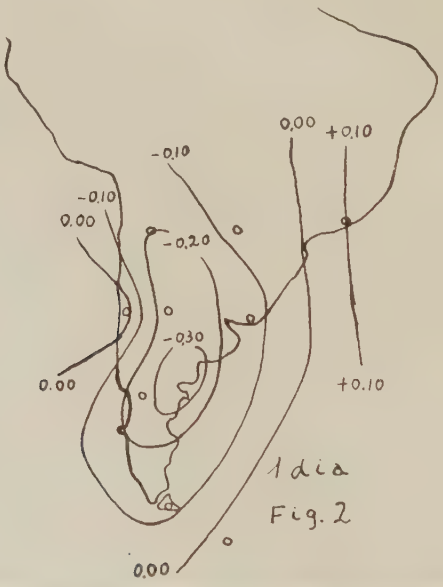
Defasajes	Montevideo $\varphi=35°$ $\omega=55°$	Jujuy $\varphi=24°$ $\omega=65°$	Formosa $\varphi=26°$ $\omega=58°$	Río Janeiro $\varphi=23°$ $\omega=43°$
0 día.	+ 0.05	— 0.04	— 0.03	0.00
1 »	— 0.16	— 0.20	— 0.08	+ 0.10
2 días	— 0.16	— 0.16	— 0.14	+ 0.09
3 »	+ 0.14	+ 0.16	+ 0.06	— 0.06
4 »	+ 0.23	+ 0.29	+ 0.20	— 0.08

Habiéndose empleado, para el cálculo, 216 valores por estación.

En las figuras 1, 2, 3, 4, 5 hemos dibujado las curvas de isocoeficientes para los distintos defasajes, pudiéndose notar que el núcleo

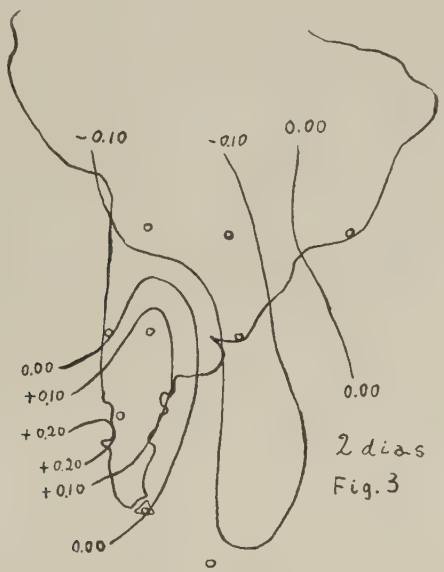


positivo sigue la misma trayectoria que la media de los anticiclones.



Podemos ensayar la siguiente interpretación física de los fenómenos: por ejemplo, un máximo de velocidad de viento en Cristo

Redentor, irá acompañado de una acción depresionaria bastante intensa sobre la presión en la región central argentina, entre los paralelos 35° S y 45° S, mientras que en los océanos se observará una débil tendencia a subir en el barómetro, en el día que sigue (día 1); esa zona de mayor acción disminuyente sobre la presión,



se trasladará hacia el este, comenzando a entrar el día 2 un área de acción incrementante, consecuencia del máximo de circulación atmosférica, área que en los días 3 y 4 se desplazará hacia el NE, teniendo su centro el día 4, en latitud 25° S y longitud 60° W.

El cálculo de correlación entre la velocidad del viento a 3000 m. en Noronha y la presión en Ushuaia y en Bariloche da:

Defasaje	Ushuaia $\varphi = 55° S\ \omega = 68° w$	Bariloche $\varphi = 41° S\ \omega = 72° w$
0 días	— 0.04	+ 0.07
1 día	— 0.04	— 0.02
2 días	+ 0.04	— 0.08
3 »	+ 0.13	— 0.05
4 »	+ 0.08	+ 0.13

Número de valores = 100.

resultado análogo al obtenido con respecto al viento superior en Cristo Redentor, pero con valores de coeficientes mucho más bajos.

Si hacemos ahora el estudio de la correlación entre la radiación solar y la presión en las estaciones del cuadro I, tendremos:

CUADRO II

Coeficientes de correlación entre la radiación solar y la presión en la región sur de Sud América (valores hallados para la primavera del año 1936).

Defasajes	Orcadas	Ushuaia	Bariloche	V. Mercedes	S. de Chile
0 día	+ 0.23	+ 0.12	— 0.15	— 0.06	0.00
1 »	+ 0.09	+ 0.12	— 0.23	— 0.35	— 0.08
2 días	— 0.14	— 0.01	+ 0.11	+ 0.04	— 0.02
3 »	— 0.12	+ 0.14	+ 0.37	+ 0.58	— 0.19

Defasajes	Montevideo	Jujuy	Formosa	Río Janeiro
0 día.	+ 0.05	+ 0.09	+ 0.16	+ 0.03
1 »	— 0.20	— 0.37	— 0.21	+ 0.15
2 días	— 0.35	— 0.38	— 0.50	+ 0.06
3 »	+ 0.01	+ 0.27	+ 0.06	— 0.06

Comparado este cuadro con el I se podrá comprobar la similitud de ambos y los resultados análogos que arrojan.

Las comprobaciones que anteceden se pueden sintetizar en la siguiente forma:

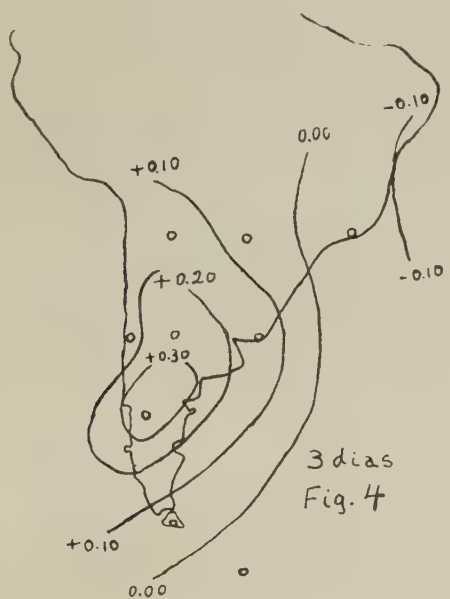
Las variaciones de la intensidad de la circulación atmosférica están en conexión con las variaciones del calor emitido por el sol y en fase, por lo menos, en la región tropical de Sud América; existiendo además algunas estaciones que, a pesar de hallarse en la zona templada, quizás por su situación geográfica especial, también acusan oscilaciones en la velocidad de circulación del aire que están en fase con la radiación solar.

La presión en las llanuras de la región central mediterránea de la Argentina, oscila en forma opuesta a la radiación del sol y con un intervalo de 1 día del máximo solar al mínimo barométrico y de 3 días al máximo de presión.

El análisis entre la velocidad del viento a 6000 m. de altura en Cristo Redentor y la presión, muestra análogo resultado, sólo que

en este caso el intervalo entre el máximo de viento y el mínimo de presión oscila entre 0 y 1 día y es de 3 días para el máximo del barómetro.

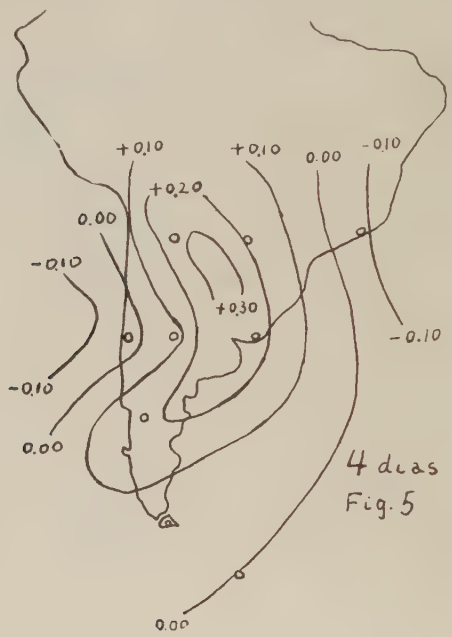
En ambas correlaciones se puede notar que la disminución de presión sobre la zona sur del continente, va acompañada de un alza de la presión sobre los océanos Pacífico y Atlántico.



Teniéndose, por otro lado, que un aumento en la circulación atmosférica en la zona tropical, va seguido por un aumento de la presión en la zona templada, con un intervalo de 3 ó 4 días, podemos deducir que el mecanismo por medio del cual el calor del sol actúa sobre el tiempo en Sud América, es tal, que mientras, por un lado, un aumento de calor emitido activa la circulación atmosférica (1) y aumenta la velocidad de derrame del aire tropical en las altas capas de la atmósfera, hace bajar la presión en ciertas regiones de la parte templada, que por su calidad de suelo o por su situación geográfica, son propicias a sentir los efectos, ocasionándose un desequilibrio en la presión, pues aumenta la altura barométrica sobre los océanos y baja en el continente; estos efectos se manifiestan unidos, en va-

(1) Ver mi trabajo « Sobre efectos de la radiación solar en la estratosfera », en estos *Anales*, Octubre de 1937.

lores de la velocidad del viento, en Cristo Redentor, que se ve influída por ambos procesos; la mayor afluencia de aire sobre los océanos actúa sobre los centros de acción permanentes (en nuestro caso anticiclón permanente del Pacífico sur), ocasionándose el des-



prendimiento de masas de aire frío que en forma de anticiclones recorren el territorio argentino de SW a NE, en los días posteriores al máximo de radiación solar.

Efectos sobre la presión en la región sur de Sud América, ocasionados por el nacimiento de manchas o grupos de manchas en el centro del disco del sol

El nacimiento de una mancha o grupos de manchas en el disco solar debe, indudablemente, producir alteraciones en la radiación emitida por el astro, alteraciones que se reflejarán, en diversas formas, sobre nuestro planeta; veremos aquí qué efectos producen sobre la presión en la región sur del continente.

Los valores hallados corresponden a un promedio de 33 casos observados durante el año 1936 y parte de 1937; las manchas cuyos

efectos se estudiaron, fueron aquellas que al nacer tenían su eje central dirigido hacia la tierra, es decir, aquellas que se observó que nacían en la zona central del disco solar; el cuadro III, que sigue, muestra los efectos sobre la presión en distintas estaciones.

Cuadro III

Variación en milímetros en la presión producida por el movimiento de manchas en la zona central del disco solar.

Superficie media de la mancha nacida 144 millonésimos de hemisferio

días	Ushuaia	Bariloche	V. Mercedes	Buenos Aires	Formosa	Río Janeiro
0	— 1.0	— 2.2	— 2.5	+ 0.9	+ 0.8	— 0.6
1	+ 2.4	+ 1.1	+ 0.6	— 0.8	— 0.3	+ 0.8
2	+ 1.0	+ 2.2	+ 1.7	— 0.2	0.0	0.0
3	— 1.3	+ 0.5	0.0	+ 1.8	+ 0.4	— 0.3
4	+ 0.5	— 2.3	— 1.2	— 1.2	0.0	+ 1.1

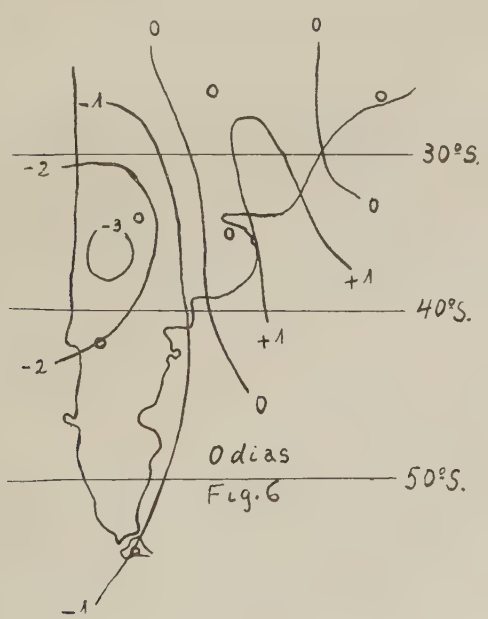
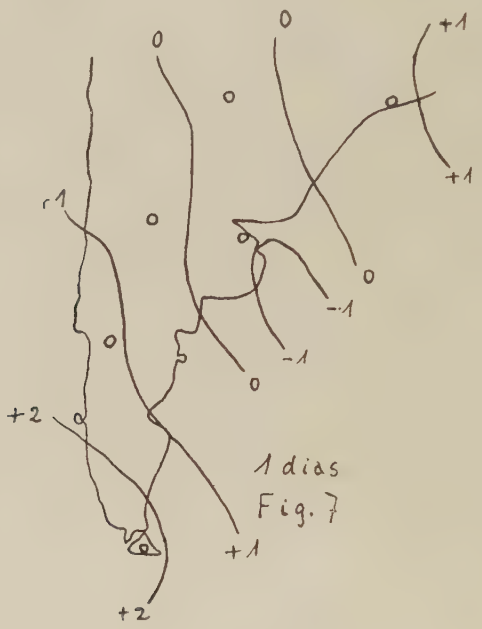


Fig. 6

Las figuras 6, 7, 8 y 9 muestran la marcha de los núcleos de variación; en ellas se puede notar la similitud que tienen con las curvas

de isocoeficientes de correlación, entre el viento de altura en Cristo Redentor y la presión.

El nacimiento de la mancha provoca, sobre la zona mediterránea argentina, un descenso en la presión y probablemente a la altura del paralelo 35° S en los océanos un aumento, en núcleo negativo



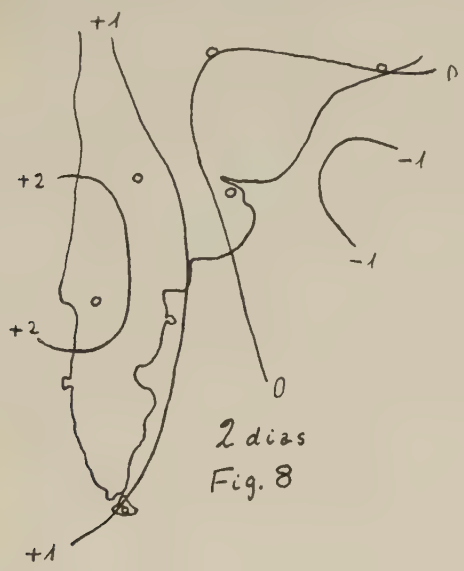
de variación, se desplaza hacia el este y le sigue un núcleo positivo que penetra por el sudoeste desde el Pacífico, y que el día 3 ocupa el centro del país.

Fenómenos que preceden a los intensos anticiclones invernales argentinos

Durante el invierno, el territorio de la República es recorrido por intensos anticiclones, que provocan en su frente delantero lluvias y nevadas intensas, y fuertes fríos, durante su paso; estudiaremos aquí la evolución de algunas variables meteorológicas en los días que preceden a la entrada al país de la gran masa de aire frío.

Denominaremos día 0 al día en que el anticiclón aparece penetrando a territorio argentino, dando signo negativo a los días que preceden al 0 y positivo a los que siguen.

El análisis de las variaciones de la velocidad del viento muestra que 48 horas antes a la entrada del núcleo positivo de variación de la presión, se produce en Cristo Redentor, a 6000 metros de altura,



un incremento grande de la velocidad del viento, aumentando 30 kilómetros por hora, en promedio, su velocidad del día — 3 al — 2; en Comodoro Rivadavia, en los 46° S, el viento cae 30 kilómetros por hora, del día — 4 al — 3, y la variación alcanza su máximo positivo del día — 1 al día 0 (+ 18 km/hora).

La radiación solar crece del día — 3 al — 2 en + 5.2 milésimos de caloría gramo por centímetro cuadrado, mientras que la superficie manchada aumenta continuamente desde el día — 4 hasta el día 0.

Los números relativos también presentan un máximo de variación positiva del día — 3 al — 2; y la temperatura en la zona de Buenos Aires crece hasta el día — 2 a partir del cual empieza a descender.

Los sondajes aerológicos en Noronha en latitud 45° S, muestran un máximo positivo de variación en la velocidad del viento a 3000 m. de altura, del día — 5 al — 4 (+ 3.5 m/s.), luego un descenso del día — 4 al — 3 (— 4.7 m/s), y por último un segundo máximo positivo del día — 2 al — 1 (+ 2,2 m/s).

En el cuadro IV se muestra el detalle de la variación de los distintos elementos:

Cuadro IV

Variación de las distintas variables meteorológicas, que preceden a la entrada de un anticiclón invernal de más de 770 milímetros.

Variación de la presión (milímetros)

	Δ^{-5}_{-4}	Δ^{-4}_{-3}	Δ^{-3}_{-2}	Δ^{-2}_{-1}	Δ^{-1}_{0}	Δ^{0}_{+1}
Mendoza		+ 1.8	+ 0.1	— 1.0	+ 7.0	+ 2.0
Cipolletti		+ 2.4	— 1.1	+ 1.0	+ 7.6	+ 0.6
Esquel		+ 2.6	— 2.5	+ 4.1	+ 8.0	— 1.2
Cor. Sarmiento. . . .		+ 3.7	— 1.3	+ 1.7	+ 9.8	— 1.9
Río Gallegos		+ 7.9	— 1.8	+ 2.5	+ 5.7	— 1.3
Mar del Plata		+ 2.8	+ 1.6	— 0.6	+ 3.0	+ 1.1

Variación de la velocidad del viento de altura (Km/h)

C. Redentor (6000 m.)		— 15	+ 30	— 14	— 21	+ 12
Junín (4000 m.) . . .		— 20	0	— 11	+ 1	+ 2
Trelew (4000 m.). . .		— 24	— 13	0	+ 8	— 16
C. Rivadavia (4000 m.)		— 30	— 7	+ 4	+ 18	— 13
F. de Noronha (1) (3000 metros)	+ 3.5	— 4.7	— 1.0	+ 2.2	+ 0.6	+ 0.7

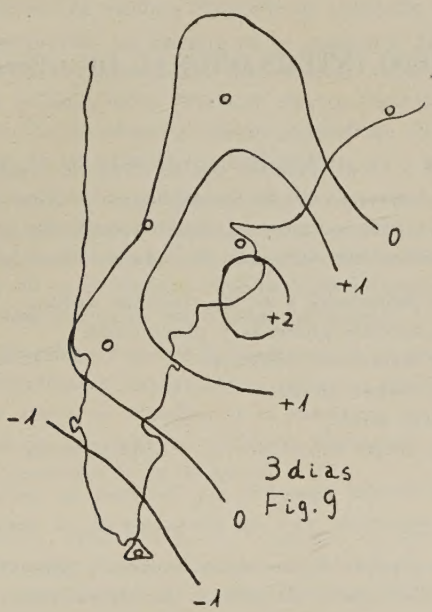
Variables diversas

Radiación solar (milésimos).		— 2.5	+ 5.2	— 0.6	+ 1.0	+ 0.7
Sup. manchada del sol (millonésimos) . . .		+ 81	+ 48	+ 81	+ 23	— 127
Nros. relativos		0	+ 8.7	— 0.7	+ 4.4	+ 1.0
Temperatura B. Aires (0° C)		+ 2.5	+ 1.3	— 1.2	— 1.5	— 1.8

De donde se puede deducir que los grandes anticiclones argentinos son precedidos por un notable aumento en la actividad del sol, que se manifiesta: en la superficie manchada, que del día — 4 hasta

(1) El número de datos es pequeño — variaciones en m/s.

el 0 aumenta en 233 millonésimos de hemisferio; en la radiación, que en el mismo intervalo crece en 3.1 milésimos, y en los números relativos, que aumentan en 12.4.



En lo que respecta a la circulación atmosférica, muestra un aumento de intensidad 5 y 1 días antes en Noronha, y 2 días antes en Cristo Redentor, con variaciones positivas en la temperatura en la zona de Buenos Aires 3 y 4 días antes.

Río Santiago, Marzo 17 de 1938.

CONGRESO INTERNACIONAL DE GEOGRAFÍA

Entre los días 18 y 28 del próximo mes de Julio, va a celebrarse en Amsterdam un Congreso Internacional de Geografía, en el cual serán tratados, en primer lugar, las cuestiones siguientes, según decisión de la Asamblea General de la Unión Geográfica Internacional celebrada en Varsovia en 1934:

Estudio de las poblaciones y de las viviendas rurales.
Estudio de las terrazas pliocenas y pleistocenas.
Estudio de las variaciones climáticas.
Publicación de mapas antiguos.
La fotogrametría aérea.
La cartografía de las superficies de erosión terciaria.

Por su parte, el Comité Ejecutivo del Congreso ha redactado la siguiente lista de cuestiones especiales para ser discutidas en las sesiones:

Cartografía: Adaptación de las representaciones topográficas y cartográficas a la práctica de la fotogrametría, y más particularmente en lo que concierne a la construcción de las líneas hipométricas.

—Empleo de la fotograía aérea para obtener una cartografía rápida de regiones poco conocidas.

—Cuestiones diversas en el dominio de las proyecciones cartográficas.

Geografía Física: La evolución glacial. La cuestión de la «escalera de Piedmont». La cuestión de las morenas terminales.

Oceanografía: La circulación general en los océanos. Oscilaciones internas en los océanos.

—El relieve del fondo del mar, particularmente en el hemisferio meridional.

Geografía humana: Movimientos migratorios actuales y factores que influyen en su carácter. Relaciones funcionales entre las aglomeraciones urbanas y la campiña. Ventajas y desventajas sociales de la industria a domicilio (o eventualmente de la industria en parte a domicilio y en parte en la usina) para una población agraria en circunstancias geográficas determinadas.

Geografía económica: El desenvolvimiento industrial de los puertos marítimos. Relaciones cuantitativas y cualitativas de los diversos modos de transporte en general y en cada país en particular. ¿Sería posible expresar de una manera más exacta, por índices numéricos, el valor productivo de los factores suelo y clima, a fin de obtener una medida que permita la comparación económica de los diversos países?

Geografía Colonial: Posibilidades de colonización por la raza blanca, de las regiones comprendidas en la zona tropical. Relaciones entre la densidad de la población y el modo de utilización o explotación del suelo en las regiones coloniales. La industrialización, como condición indispensable para el mantenimiento de la prosperidad en las regiones tropicales de población muy densa.

Historia de la geografía: La historia de la geometría de la tierra y de la localización geográfica. Influencia del Renacimiento sobre la geografía y la reanudación de los estudios sobre Ptolomeo. Puntos seguros y puntos inciertos en la interpretación de los mapas y cartas geográficas, en especial sobre las relativas a la época de los grandes descubrimientos.

Paisaje geográfico: El concepto de «paisaje», en la geografía humana. Estudio analítico de la estructura del paisaje como base de la utilización del suelo por las poblaciones, la agricultura y la industria. Determinación de cuales son y cuáles deben ser en la civilización moderna, los principios sobre los cuales hay que basar la conservación de las bellezas del paisaje.

Metodología y didáctica: Valor de la enseñanza de la geografía para llegar a relaciones de cordialidad y entendimiento entre las naciones. Determinación de los asuntos que deben ser tratados en la enseñanza de la geografía y del grado de intensidad con que deben ser tratados. Ventajas y desventajas del método Dalton en la enseñanza de la Geografía.

* * *

El Comité Ejecutivo, inspirándose en el ejemplo de precedentes Congresos, sólo admitirá la discusión de las cuestiones explícitamente mencionadas en la lista anterior, así como también se reserva el derecho de no dar curso a las comunicaciones que puedan dar lugar a discusiones susceptibles de tener derivaciones extrañas a los asuntos prefijados o de comprometer el orden de las sesiones.

Complementando los trabajos del Congreso se efectuarán diversas excursiones: una de ellas al antiguo «Zuiderzée», comprendo un trayecto desde Amsterdam hasta Wiesingermeer, a través de los polders, desecados en 1930, para mostrar la manera como se pueden desecar las tierras y transformar los pantanos en fértiles regiones agrícolas con florecientes ciudades. El mismo fondo del mar, ha sido convxertido en tierras cultivables, que ya han sido subdivididas y colonizadas.

Otra de las excursiones comprende el viaje desde Amsterdam a las Indias Holandesas orientales, islas de Java, Balí y Sumatra, etc. Aparte de lo pintoresco de la región a visitar y del interés geográfico que ofrece la naturaleza volcánica de estas islas, están los aspectos sociales que presenta una comarca en plena región tropical, muy densamente poblada (más que Bélgica, en término medio), con ciudades que sobrepasan el medio millón de habitantes.

La Secretaría del Congreso, a la cual se pueden solicitar mayores informaciones, funciona en el Koloniaal Instituut, Mausitskade 63, Amsterdam.

CONGRESO INTERNACIONAL DE ANTROPOLOGÍA Y ETNOGRAFÍA

En el próximo mes de agosto tendrá lugar en Copenhague un Congreso Internacional de Ciencias Antropológicas y Etnográficas, bajo la presidencia de Mr. Thomas Thomsen. En las diferentes sesiones serán tratados diversos trabajos sobre los siguientes temas:

Antropología anatómica y biotipológica: Relaciones mutuas y afinidades entre los hombres fósiles. Metodología antropológica. Examen crítico del concepto de «raza» en antropología.

Antropología fisiológica y hereditaria: Propagación geográfica de los linajes humanos típicos.

Psicología: Influencia de los factores de la civilización en el carácter. Cambios habidos en las diferentes culturas.

Demografía: Movimiento de la población, considerados especialmente desde el punto de vista de la natalidad y la mortalidad.

Etnología: Origen y desenvolvimiento de la Agricultura y de la cría del ganado. Origen de las plantas cultivadas y de los animales domésticos.

Etnografía: Los pueblos nómades y pastoriles de Asia y Africa. Las relaciones entre la civilización de Centro América y las de Norte y Sud América. Las relaciones culturales entre Oceanía y el sudeste de Asia. Corrientes prehistóricas e históricas de la civilización en las regiones de los círculos polares. Creencias y costumbres vinculadas con el año Agrícola en Europa.

Sociología: En qué medida pueden la Arqueología y la Prehistoria servir como base para el estudio de la cultura intelectual de los pueblos.

Filología: Sistematización y «standardización» de las lenguas indígenas. Formación de los idiomas comunes. Lenguas autóctonas y civilizadas, habladas en los pueblos indígenas.

El secretario general del Congreso es el Dr. Kaj Birket-Smith, Universidad de Copenhague, a quien pueden solicitarse mayores informaciones.